539.4
Б-72

[illegible]ростатика

и

Теория упругости

1765

П
539.4
Б-72

ГИДРОСТАТИКА

И

ТЕОРІЯ УПРУГОСТИ.

СОСТАВИЛЪ

Д. БОБЫЛЕВЪ.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.
ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМИИ НАУКЪ.
(Вас. Остр., 9 л., № 12).
1886.

П
539.7
Б-72

Книга, первый выпускъ которой я теперь издаю, имѣетъ цѣлью дать возможно полное изложеніе теоріи упругости со включеніемъ ученія о распространеніи свѣта въ прозрачныхъ средахъ. Я надѣюсь, что слѣдующимъ выпускомъ книга будетъ закончена; въ немъ будетъ помѣщено предисловіе, заключающее въ себѣ краткій историческій обзоръ развитія этихъ ученій до настоящаго времени.

Приношу мою глубокую благодарность Совѣту С.-Петербургскаго Университета, доставившему мнѣ средства на напечатаніе курса аналитической механики и этого самаго выпуска.

Д. Бобылевъ.

1886 года.
Май, 1-е число.

1765
е/о
о

ВВЕДЕНІЕ ВЪ ТЕОРІЮ УПРУГОСТИ, ГИДРОСТАТИКА
и
ОСНОВНЫЯ УРАВНЕНІЯ ГИДРОДИНАМИКИ.

I.

О составленіи дифференціальныхъ уравненій движенія гибкихъ и деформируемыхъ сплошныхъ тѣлъ.

Въ этой главѣ будутъ изложены соображенія, которыми руководствуются при примѣненіи механики системы матерьяльныхъ точекъ къ теоріи равновѣсія и движенія деформируемыхъ сплошныхъ матерьяльныхъ тѣлъ разнаго рода.

§ 1. Предположенія, дѣлаемыя относительно силъ взаимодѣйствія между атомами.

По атомистической теоріи, всякое матерьяльное тѣло, не смотря на свою кажущуюся сплошность, состоитъ изъ атомовъ.

Каждый атомъ есть недѣлимое абсолютно-твердое тѣло, размѣры котораго въ такой же степени ничтожны, въ какой, примѣрно, громадны разстоянія отъ земли до неподвижныхъ звѣздъ.

Между атомами дѣйствуютъ силы взаимодѣйствія, которыя, можетъ быть, не только стремятся измѣнить разстоянія между ними, но могутъ еще побуждать ихъ принять вращательныя движенія относительно другъ друга.

Такимъ образомъ теорія движенія и равновѣсія матерьяльнаго нетвердаго тѣла приводится къ вопросу механики системы твердыхъ тѣлъ, между которыми дѣйствуютъ нѣкоторыя силы взаимодѣйствія; для того, чтобы поставить разсужденія на опредѣленную почву, необходимо сдѣлать предположенія относительно вида атомовъ и относительно закона взаимодѣйствій между ними.

Во многихъ вопросахъ математической физики нѣтъ надобности принимать въ разсчетъ вращеніе атомовъ; тогда можно каждый атомъ замѣнить матерьяльною точкою, не дѣлая никакихъ предположеній относительно вида атомовъ.

Относильно силъ взаимнодѣйствія, дѣйствующихъ между матерьяльными точками, замѣняющими атомы, дѣлаются обыкновенно слѣдующія предположенія.

Предположеніе E относительно взаимнодѣйствій между атомами.

Предполагается, что силы эти слѣдуютъ началу равенства и противоположности, т. е., что силы, дѣйствующія между атомами A и B, равны и прямопротивоположны.

Кромѣ того предполагается, что эти силы направлены по линіи, соединяющей точки, то есть атомы A и B, и что величина каждой изъ этихъ силъ равняется произведенію

$$m_A m_B f(r_{AB}),$$

гдѣ m_A и m_B суть массы атомовъ, а r_{AB} — разстояніе между ними.

Кромѣ этихъ силъ, на атомы могутъ дѣйствовать еще и другія силы, исходящія изъ центровъ, лежащихъ внѣ разсматриваемаго тѣла.

При такихъ предположеніяхъ, теорія движенія и равновѣсія матерьяльнаго нетвердаго тѣла приводится къ вопросу механики системы матерьяльныхъ точекъ, къ которымъ приложены данныя силы.

§ 2. Шесть такихъ дифференціальныхъ уравненій для каждой части тѣла, изъ которыхъ исключены величины всѣхъ внутреннихъ силъ этой части.

Представимъ себѣ всю систему матерьяльныхъ точекъ, замѣняющихъ атомы даннаго матерьяльнаго тѣла.

Выдѣлимъ мысленно какую либо часть тѣла, какую угодно и которую угодно.

Всю совокупность атомовъ, заключающихся внутри выдѣленной части, будемъ обозначать знакомъ Jn, а всю совокупность атомовъ остальной части тѣла — знакомъ Ex.

Атомъ части Jn будемъ обозначать буквою m съ надлежащимъ значкомъ внизу и сбоку ея, а атомъ части Ex — буквою μ, тоже съ надлежащимъ значкомъ (напримѣръ, $m_1, m_2, m_3, \ldots . m_i$ суть различные атомы части Jn, а $\mu_1, \mu_2, \ldots \ldots \mu_k$ — различные атомы части Ex); впрочемъ эти знаки должны обозначать преимущественно величины массъ тѣхъ же атомовъ.

Представимъ себѣ, что мы составили дифференціальныя уравненія движенія для каждаго изъ атомовъ части Jn; для того, чтобы условиться относительно обозначенія нѣкоторыхъ величинъ, входящихъ въ эти уравненія, мы выпишемъ здѣсь одно изъ нихъ, а именно первое дифференціальное уравненіе для атома m_i:

$$m_i x_i'' = m_i \sum_{Jn} m_j f_{ij}(r_{ij}) \frac{(x_i - x_j)}{r_{ij}} + m_i \sum_{Ex} \mu_k f_{ik}(r_{ik}) \frac{(x_i - x_k)}{r_{ik}} + X_i.$$

Вторая часть этого уравненія представлена въ видѣ трехъ членовъ; первый членъ выражаетъ сумму проэкцій силъ, дѣйствующихъ на атомъ m_i со стороны всѣхъ остальныхъ атомовъ части Jn, такъ что суммированіе, означенное въ этомъ членѣ, должно быть распространено на всѣ атомы этой части; второй членъ выражаетъ сумму

проэкцій силъ, дѣйствующихъ на атомъ m_i со стороны всѣхъ атомовъ части Ex; наконецъ, третій членъ (X_i) выражаетъ сумму проэкцій всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на атомъ m_i извнѣ разсматриваемаго тѣла.

Представимъ себѣ далѣе, что съ дифференціальными уравненіями движенія атомовъ части Jn мы поступимъ такъ, какъ показано въ §§ 85-мъ и 93-мъ механики матерьяльныхъ точекъ; тогда получимъ шесть дифференціальныхъ уравненій для части Jn: три дифференціальныя уравненія движенія центра инерціи ея и три дифференціальныя уравненія моментовъ количествъ движенія всей этой части. Въ первыхъ трехъ уравненіяхъ взаимно сократятся проэкціи каждой пары равныхъ и противоположныхъ взаимнодѣйствій между атомами части Jn, а въ остальныхъ трехъ — равные и противоположные моменты каждой такой пары, такъ что *во всѣхъ шести уравненіяхъ не будетъ заключаться никакихъ внутреннихъ силъ* части Jn матерьяльнаго тѣла.

Эти шесть диффренціальныхъ уравненій будутъ таковы:

$$\sum_{Jn} m_i x_i'' = \sum_{Jn} m_i \sum_{Ex} \mu_k f_{ik}(r_{ik}) \frac{(x_i - x_k)}{r_{ik}} + \sum_{Jn} X_i \ldots\ldots\ldots (1, a)$$

$$\sum_{Jn} m_i y_i'' = \sum_{Jn} m_i \sum_{Ex} \mu_k f_{ik}(r_{ik}) \frac{(y_i - y_k)}{r_{ik}} + \sum_{Jn} Y_i \ldots\ldots\ldots (1, b)$$

$$\sum_{Jn} m_i z_i'' = \sum_{Jn} m_i \sum_{Ex} \mu_k f_{ik}(r_{ik}) \frac{(z_i - z_k)}{r_{ik}} + \sum_{Jn} Z_i \ldots\ldots\ldots (1, c)$$

$$\frac{d\lambda_x}{dt} = \sum_{Jn} m_i \sum_{Ex} \mu_k f_{ik}(r_{ik}) \frac{(z_i y_k - y_i z_k)}{r_{ik}} + \sum_{Jn} (y_i Z_i - z_i Y_i), \ldots\ldots (1, d)$$

$$\frac{d\lambda_y}{dt} = \sum_{Jn} m_i \sum_{Ex} \mu_k f_{ik}(r_{ik}) \frac{(x_i z_k - z_i x_k)}{r_{ik}} + \sum_{Jn} (z_i X_i - x_i Z_i), \ldots\ldots (1, e)$$

$$\frac{d\lambda_z}{dt} = \sum_{Jn} m_i \sum_{Ex} \mu_k f_{ik}(r_{ik}) \frac{(y_i x_k - x_i y_i)}{r_{ik}} + \sum_{Jn} (x_i Y_i - y_i X_i), \ldots\ldots (1, f)$$

гдѣ λ_x, λ_y, и λ_z суть моменты количествъ движенія части Jn вокругъ осей X-овъ, Y-овъ и Z-овъ.

Такія шесть дифференціальныхъ уравненій должны имѣть мѣсто, какъ для всего матерьяльнаго тѣла, такъ и для всякой части его, большой или малой.

§ 3. Радіусъ сферы дѣйствія частичныхъ силъ.

Произведеніе $m_i \mu_k f_{ik}(r_{ik})$, заключающееся въ предыдущихъ формулахъ, выражаетъ положительно-взятую величину отталкивающей силы или отрицательно-взятую величину притягательной силы, дѣйствующей между атомами m_i и μ_k.

Видъ функціи $f_{ik}(r_{ik})$ въ точности неизвѣстенъ; но для объясненія большей части извѣстныхъ намъ явленій физическаго міра, а въ особенности тѣхъ, которыя разсматриваются въ физикѣ частичныхъ силъ, намъ приходится сдѣлать слѣдующее предположеніе относительно характера этой функціи.

Предположеніе F относительно радіуса сферы дѣйствія частичныхъ силъ.

Предполагается, что функція $f(r)$ состоитъ изъ суммы двухъ частей.

Первая часть есть Ньютонова сила тяготѣнія, обратно-пропорціональная квадрату разстоянія.

Вторая часть есть такая функція, которая имѣетъ замѣтную величину только при ничтожно-малыхъ разстояніяхъ между атомами, при разстояніяхъ же равныхъ или большихъ нѣкоторой весьма малой величины ρ, функція эта равна нулю.

Означивъ эту вторую функцію черезъ $\varphi(r)$, можемъ выразить приведенное предположеніе въ видѣ слѣдующей формулы:

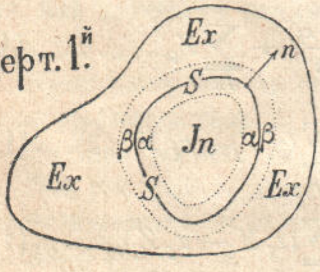
$$m\mu f(r) = -\varepsilon \frac{m\mu}{r^2} + m\mu\varphi(r).$$

Сила $m\mu\varphi(r)$ извѣстна подъ именемъ *частичной силы*, а разстояніе ρ называется *радіусомъ сферы дѣйствія частичныхъ силъ*.

При такомъ предположеніи первые члены вторыхъ частей уравненій (1) раздѣлятся на двѣ части каждый; одна часть будетъ относиться къ частичнымъ силамъ, другая — къ силамъ тяготѣнія, дѣйствующимъ со стороны атомовъ μ на атомы m.

Обратимъ вниманіе на члены, зависящіе отъ частичныхъ силъ.

Черт. 1-й



На основаніи вышеприведеннаго предположенія, эти члены будутъ заключать взаимнодѣйствія только между такими парами атомовъ μ и m, разстоянія между которыми не болѣе ρ (радіуса сферы дѣйствія); всѣ такіе атомы μ части тѣла Ex находятся въ слоѣ толщины ρ, прилежащемъ къ поверхности S, отдѣляющей эту часть отъ части Jn; всѣ же такіе атомы m части тѣла Jn находятся въ другомъ слоѣ такой же толщины, прилежащемъ къ той же поверхности S со стороны Jn; на чертежѣ 1-мъ изображены оба эти слоя, первый обозначенъ буквою β, второй — буквою α.

Такимъ образомъ оказывается, что частичныя силы, дѣйствующія со стороны части тѣла Ex на часть Jn, приложены къ атомамъ слоя α и исходятъ изъ атомовъ слоя β.

§ 4. Напряженіе (Stress).

Выдѣлимъ мысленно изъ поверхности S какой либо элементъ ΔS весьма малыхъ размѣровъ.

Представимъ себѣ всю совокупность тѣхъ частичныхъ силъ, приложенныхъ къ атомамъ части слоя α, прилежащей къ элементу ΔS, направленія которыхъ пересѣкаютъ поверхность этого элемента.

Въ англійскомъ научномъ языкѣ существуетъ особый терминъ для наименованія этой совокупности силъ, а именно терминъ „Stress", который мы переведемъ на русскій языкъ словомъ „*напряженіе*"; но намъ необходимо условиться относительно правильнаго употребленія этого термина.

Вышесказанную совокупность силъ мы будемъ называть *напряженіемъ, дѣйствующимъ сквозь площадку ΔS на часть тѣла Jn со стороны части Ex*; вслѣд-

ствіе равенства и противоположности взаимнодѣйствій между атомами, *напряженіе, дѣйствующее сквозь ту же площадку на часть тѣла Ex со стороны части тѣла Jn*, будетъ совокупностью силъ, равныхъ и противоположныхъ силамъ предыдущей совокупности.

Пусть A есть какая либо точка поверхности S, находящаяся внутри площадки ΔS или на ея периметрѣ. Возстановимъ нормаль n изъ точки A къ поверхности S внаружу части Jn.

Составимъ сумму проэкцій на ось X-овъ всѣхъ силъ первой совокупности и раздѣлимъ эту сумму на величину площади элемента ΔS; точно также поступимъ и съ суммами проэкцій этихъ силъ на двѣ другія оси; получимъ три отношенія:

$$\frac{\Sigma X}{\Delta S},\ \frac{\Sigma Y}{\Delta S},\ \frac{\Sigma Z}{\Delta S} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Величины этихъ отношеній могутъ измѣняться съ измѣненіемъ мѣста элемента на поверхности и съ измѣненіемъ размѣровъ его; при непрерывномъ уменьшеніи размѣровъ элемента, отношенія эти будутъ приближаться къ нѣкоторымъ предѣльнымъ значеніямъ, величины которыхъ могутъ зависѣть отъ того, къ какой точкѣ поверхности приближается постепенно съуживающаяся периферія элемента.

Предположимъ, что, при уменьшеніи размѣровъ элемента ΔS, мы съуживаемъ его периферію такимъ образомъ, чтобы точка A всегда находилась внутри или на периферіи; пусть X_n, Y_n и Z_n суть предѣльныя значенія, къ которымъ отношенія (2) приближаются при такомъ уменьшеніи размѣровъ элемента ΔS, т. е.:

$$\left.\begin{aligned} \text{предѣлъ} \left[\frac{\Sigma X}{\Delta S}\right]_{\Delta S=0} &= X_n, \\ \text{предѣлъ} \left[\frac{\Sigma Y}{\Delta S}\right]_{\Delta S=0} &= Y_n, \\ \text{предѣлъ} \left[\frac{\Sigma Z}{\Delta S}\right]_{\Delta S=0} &= Z_n. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Величину:

$$F_n = +\sqrt{X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

мы будемъ называть *величиною напряженія, дѣйствующаго на часть Jn въ точкѣ A поверхности S*, а направленіе, проведенное изъ точки A и составляющее съ осями координатъ такіе углы, косинусы которыхъ равны отношеніямъ:

$$\frac{X_n}{F_n},\ \frac{Y_n}{F_n},\ \frac{Z_n}{F_n},$$

назовемъ *направленіемъ этого напряженія.*

Направленіе напряженія мы будемъ обозначать тѣмъ же знакомъ F_n, какимъ обозначаемъ величину его; поэтому можемъ написать слѣдующія равенства:

$$\left.\begin{aligned} F_n \cos(F_n, X) &= X_n, \\ F_n \cos(F_n, Y) &= Y_n, \\ F_n \cos(F_n, Z) &= Z_n, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

выражающія, что X_n, Y_n, Z_n суть проэкціи напряженія F_n на оси координатъ, или составляющія его по этимъ осямъ.

§ 5. Выраженія проэкцій на оси координатъ главнаго вектора и главнаго момента напряженій, дѣйствующихъ на часть тѣла.

Если точка приложенія какой либо силы будетъ перенесена на какую либо длину вдоль по ея направленію, то черезъ это не измѣнится ни моментъ ея вокругъ какой нибудь оси, ни моментъ ея вокругъ какого либо центра.

Поэтому, при составленіи уравненій (1) мы вправѣ предположить, что точка приложенія каждой частичной силы, дѣйствующей изъ атома μ части Ex на атомъ m части Jn, перенесена изъ m, вдоль по направленію $m\mu$, въ точку пересѣченія длины $m\mu$ съ поверхностью S; черезъ это величины проэкцій главнаго вектора и главнаго момента частичныхъ силъ не измѣнятся, но измѣнится видъ выраженій этихъ величинъ, такъ какъ мѣстомъ приложенія частичныхъ силъ будетъ теперь считаться не слой α, а поверхность S.

Для того, чтобы составить новыя выраженія соотвѣтственныхъ членовъ уравненій (1), надо прежде всего представить себѣ, что вся поверхность S раздроблена на безчисленное множество элементовъ безконечно-малыхъ размѣровъ, затѣмъ надо составить выраженія проэкцій на оси координатъ вектора и момента напряженій, приложенныхъ къ каждому элементу; эти выраженія будутъ заключать величины X_n, Y_n, Z_n. Составивъ надлежащія выраженія, останется только взять интегралы по всей поверхности.

Величины X_n, Y_n, Z_n, т. е. проэкціи на оси координатъ напряженія, дѣйствующаго въ точкѣ поверхности S, суть функціи координатъ точекъ поверхности, но функціи не сплошныя; онѣ могли бы быть сплошными, если бы вещество было сплошнымъ въ дѣйствительности, а не состояло бы изъ атомовъ, раздѣленныхъ промежутками, и если бы частичныя силы дѣйствовали между всѣми точками слоя β и всѣми точками слоя α, а не между изолированными точками-атомами этихъ слоевъ.

Однако во всѣхъ разсчетахъ математической физики эти функціи предполагаются сплошными; на это предположеніе считаемъ нужнымъ обратить вниманіе.

Предположеніе G относительно сплошности функцій, выражающихъ проэкціи напряженія на оси координатъ.

Проэкціи X_n, Y_n, Z_n напряженій, дѣйствующихъ въ точкахъ поверхности S, предполагаются сплошными функціями координатъ.

При такомъ предположеніи, напряженія F_n въ двухъ безконечно-близкихъ точкахъ поверхности разнятся безконечно-мало, какъ по величинѣ, такъ и по направленію; если бы они были вполнѣ одинаковы во всѣхъ точкахъ элемента dS, то проэкціи на оси координатъ вектора всѣхъ частичныхъ силъ, приложенныхъ къ этому элементу, были бы равны:

$$X_n dS,\ Y_n dS,\ Z_n dS,$$

а проэкціи момента всѣхъ этихъ силъ были бы равны:

$$(y_s Z_n - z_s Y_n)\,dS,\ (z_s X_n - x_s Z_n)\,dS,\ (x_s Y_n - y_s X_n)\,dS,$$

гдѣ x_s, y_s, z_s суть координаты центра инерціи площади элемента dS.

Вообще же, на основаніи предыдущаго предположенія G, проэкціи на оси координатъ главнаго вектора напряженій, приложенныхъ къ точкамъ всей поверхности S, выразятся слѣдующими интегралами, взятыми по всей поверхности:

$$\iint X_n dS,\quad \iint Y_n dS,\quad \iint Z_n dS, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

а проэкціи главнаго момента тѣхъ же напряженій выразятся интегралами:

$$\left.\begin{array}{c} \iint (y_s Z_n - z_s Y_n)\, dS,\quad \iint (z_s X_n - x_s Z_n)\, dS, \\ \iint (x_s Y_n - y_s X_n)\, dS, \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

гдѣ x_s, y_s, z_s суть координаты какой либо точки элемента, а X_n, Y_n, Z_n — проэкціи напряженія, дѣйствующаго въ этой точкѣ на часть тѣла Jn.

§ 6. Измѣренія напряженія, дѣйствующаго въ точкѣ данной поверхности. Давленія, натяженія и тангенціальныя напряженія.

Всякія силы, приложенныя сплошнымъ образомъ къ какой либо поверхности, разсчитываются такъ сказать на единицу поверхности, а именно, для каждой точки поверхности вычисляется не величина силы, но величина нѣкотораго отношенія силы къ площади.

Разсчетъ производится такимъ же образомъ, какъ показано въ § 4-мъ относительно опредѣленія величины и направленія напряженія F_n, дѣйствующаго въ какой либо точкѣ поверхности съ той стороны, куда возстановлено положительное направленіе нормали n, на часть тѣла Jn.

Изъ формулъ (2), (3) и (4) видно, что величина напряженія F_n имѣетъ измѣренія отношенія силы къ площади, такъ что:

$$\text{единица напряженія } F_n = \frac{\text{единицѣ силы}}{(\text{единиц. длины})^2} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Чтобы составить себѣ понятіе о значеніи этой единицы, представимъ себѣ такой случай, что часть поверхности S имѣетъ видъ плоскости, что напряженія, дѣйствующія во всѣхъ точкахъ этой части поверхности, равны и параллельны между собою и что главный векторъ напряженій, приложенныхъ къ каждой единицѣ площади этой части поверхности, равенъ единицѣ силы; тогда величина напряженія, дѣйствующаго въ каждой точкѣ этой части поверхности, будетъ равна единицѣ напряженій.

Если же главный векторъ напряженій, приложенныхъ къ каждой единицѣ вышесказанной части поверхности, равенъ k единицамъ силы, а всѣ прочія обстоятельства будутъ тѣ же, то величина напряженія, дѣйствующаго въ каждой точкѣ этой поверхности, будетъ равна k единицамъ напряженій.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда поверхность S не плоская и напряженія въ точкахъ ея хотя и неодинаковы, но слѣдуютъ условію сплошности, знаніе величины и направ-

ленія напряженія F_n, дѣйствующаго въ какой либо точкѣ A этой поверхности, даетъ намъ возможность утверждать, что главный векторъ напряженій, приложенныхъ къ безконечно-малому элементу dS, заключающему въ себѣ точку A, имѣетъ величину, отличающуюся отъ $F_n\,dS$ безконечно-малыми величинами высшихъ порядковъ.

Всякое напряженіе, дѣйствующее въ точкѣ поверхности, можетъ быть разложено на двѣ составляющія: одну по направленію нормали n, другую — въ касательной плоскости къ поверхности; первая составляющая называется *натяженіемъ*, если она направлена по положительной части нормали, и *давленіемъ* въ противоположномъ случаѣ; составляющая напряженія въ касательной плоскости называется *тангенціальнымъ напряженіемъ*.

Когда извѣстны X_n, Y_n, Z_n, то составляющая напряженія по нормали n выразится такъ:

$$F_n \cos(F_n, n) = X_n \cos(n, X) + Y_n \cos(n, Y) + Z_n \cos(n, Z); \ldots \quad (9)$$

это есть натяженіе, если направленіе F_n составляетъ острый уголъ съ положительнымъ направленіемъ нормали n; если же уголъ (F_n, n) тупой, то формула (9) выражаетъ отрицательно-взятую величину давленія.

Надо имѣть въ виду, что къ наружной поверхности тѣла могутъ быть приложены *внѣшнія* давленія, натяженія и тангенціальныя напряженія.

§ 7. Силы, приложенныя къ элементамъ объема сплошнаго дѣла.

Силы, приложенныя ко всѣмъ атомамъ тѣла и дѣйствующія извнѣ его, а также силы тяготѣнія, дѣйствующія между атомами его, мы будемъ называть *силами, приложенными къ элементамъ объема тѣла* или проще *объемными силами*.

Эти силы, приложенныя къ атомамъ сплошнаго тѣла, вводятся въ разсчетъ слѣдующимъ образомъ.

Возьмемъ какую либо точку A тѣла и мысленно выдѣлимъ малый объемъ ΔO его, заключающій точку A внутри себя или на своей поверхности. Составимъ величины проэкцій на оси координатъ главнаго вектора силъ, приложенныхъ ко всѣмъ атомамъ этого объема и раздѣлимъ эти величины на массу Δm объема ΔO; получатся отношенія:

$$\frac{\Sigma X}{\Delta m}, \quad \frac{\Sigma Y}{\Delta m}, \quad \frac{\Sigma Z}{\Delta m},$$

величины которыхъ могутъ зависѣть отъ величины и вида выдѣленнаго объема ΔO тѣла. Представимъ себѣ, что мы выдѣляемъ все меньшіе и меньшіе объемы ΔO, заключающіе въ себѣ точку A; по мѣрѣ приближенія величины объема къ нулю, величины вышесказанныхъ отношеній приближаются къ нѣкоторымъ предѣламъ, которые мы означимъ такъ: $\mathfrak{X}_A$, $\mathfrak{Y}_A$, $\mathfrak{Z}_A$; слѣдовательно:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{X}_A &= \text{предѣлу} \left[\frac{\Sigma X}{\Delta m}\right]_{\Delta O = 0} \\ \mathfrak{Y}_A &= \text{предѣлу} \left[\frac{\Sigma Y}{\Delta m}\right]_{\Delta O = 0} \\ \mathfrak{Z}_A &= \text{предѣлу} \left[\frac{\Sigma Z}{\Delta m}\right]_{\Delta O = 0} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Величину:

$$\mathfrak{F}_A = + \sqrt{\mathfrak{X}_A^2 + \mathfrak{Y}_A^2 + \mathfrak{Z}_A^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

мы будемъ называть *величиною объемной силы въ точкѣ A*. Направленіе $\mathfrak{F}_A$, опредѣляемое косинусами:

$$\cos(\mathfrak{F}_A, X) = \frac{\mathfrak{X}_A}{\mathfrak{F}_A},\ \cos(\mathfrak{F}_A, Y) = \frac{\mathfrak{Y}_A}{\mathfrak{F}_A},\ \cos(\mathfrak{F}_A, Z) = \frac{\mathfrak{Z}_A}{\mathfrak{F}_A},\ \ldots\ldots (12)$$

мы условимся называть *направленіемъ* этой силы; тогда предѣлы (10) получатъ значенія проэкцій этой силы на оси координатъ, или составляющихъ ея по этимъ осямъ.

$\mathfrak{X}_A$, $\mathfrak{Y}_A$, $\mathfrak{Z}_A$ суть функціи координатъ точки A и притомъ функціи не сплошныя, такъ какъ къ промежуткамъ между атомами силъ не приложено; но мы будемъ предполагать, что эти функціи неразрывны внутри всего объема занимаемаго тѣломъ, которое мы будемъ при этомъ считать сплошнымъ; такое предположеніе аналогично предположенію G, сдѣланному относительно силъ поверхностныхъ.

Предположеніе H относительно сплошности объемныхъ силъ.

Проэкціи $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ объемной силы, дѣйствующей въ точкахъ сплошнаго тѣла, предполагаются сплошными функціями координатъ этихъ точекъ.

При такомъ предположеніи объемныя силы $\mathfrak{F}$ въ безконечно-близкихъ точкахъ тѣла разнятся между собою безконечно-мало, какъ по величинѣ, такъ и по направленію.

Величина $\mathfrak{F}$ имѣетъ измѣренія ускоренія, такъ какъ она равняется отношенію силы къ массѣ.

$$\text{Единица величинъ } \mathfrak{F} = \frac{\text{единиц. силы}}{\text{единиц. массы}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Слѣдовательно, можно сказать, что величины и направленія $\mathfrak{F}$ представляютъ собою величины и направленія тѣхъ ускореній, которыя приняли бы точки свободнаго тѣла при дѣйствіи объемныхъ силъ, если бы не существовало ни частичныхъ силъ, ни внѣшнихъ напряженій.

Если бы величины и направленія $\mathfrak{F}$ были одинаковы во всѣхъ точкахъ тѣла, то объемныя силы были бы приложены къ нему однородно и тогда величины проэкцій силы, приложенной ко всему тѣлу, равнялись бы произведеніямъ $\mathfrak{X}M$, $\mathfrak{Y}M$, $\mathfrak{Z}M$, гдѣ M есть масса тѣла.

Къ числу такихъ однородныхъ силъ принадлежитъ сила тяжести; если ось Y-овъ параллельна силы тяжести, то $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Z}$ во всякой точкѣ тѣла равна нулю, а

$$\mathfrak{Y} = \frac{g\Delta m}{\Delta m} = g$$

тоже во всякой точкѣ тѣла.

Такіе случаи однороднаго распредѣленія объемныхъ силъ встрѣчаются сравнительно рѣдко, большею частью величины и направленія $\mathfrak{F}$ неодинаковы даже въ малыхъ частяхъ тѣла.

Однако, по предполагаемой нами сплошности объемныхъ силъ, въ безконечно-близкихъ точкахъ тѣла величины и направленія $\mathfrak{F}$ разнятся между собою безконечно-

мало; слѣдовательно, чѣмъ менѣе размѣры какого либо весьма малаго элемента тѣла, тѣмъ менѣе разнятся между собою ускоренія $\mathfrak{F}$ различныхъ точекъ его и тѣмъ распредѣленіе приложенной къ нему объемной силы однороднѣе.

По этимъ причинамъ проэкціи на оси координатъ объемной силы, приложенной къ безконечно-малому объемному элементу dO, выразятся такъ:

$$\mathfrak{X}\sigma dO + \alpha_1,\ \mathfrak{Y}\sigma dO + \alpha_2,\ \mathfrak{Z}\sigma dO + \alpha_3,$$

а проэкціи на оси координатъ момента этой силы — такъ:

$$(y\mathfrak{Z} - z\mathfrak{Y})\,\sigma dO + \alpha_4,\ (z\mathfrak{X} - x\mathfrak{Z})\,\sigma dO + \alpha_5,$$
$$(x\mathfrak{Y} - y\mathfrak{X})\,\sigma dO + \alpha_6,$$

гдѣ x, y, z суть координаты какой либо точки внутри или на поверхности элемента dO, σ — плотность матеріи въ той же точкѣ, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ — проэкціи на оси координатъ объемной силы въ той же точкѣ; дополнительные члены α_1, α_2, ... α_6 становятся безконечно-малыми величинами четвертаго или высшаго порядка малости, когда элементы объема становятся безконечно-малыми величинами третьяго порядка малости.

§ 8. Новый видъ уравненій (1) параграфа 2-го.

На основаніи всего вышесказаннаго въ §§ 3—7, суммы замѣнятся интегралами, распространенными, одни — по объему части Jn, другіе — по поверхности этой части.

Интегралы, распространенные по объему, можно раздѣлить на сумму двухъ частей: одна часть будетъ заключать подъ интегралами члены третьяго порядка малости, такіе какъ $\mathfrak{X}\sigma dO$, другая будетъ заключать дополнительные члены α_1, α_2, ... α_6 четвертаго и высшаго порядка малости. При уменьшеніи размѣровъ элементовъ объема dO до безконечной малости, суммы или интегралы, заключающіе α_1, α_2, ... α_6, будутъ безконечно-малы сравнительно съ интегралами отъ членовъ $\mathfrak{X}\sigma dO$ и, въ предѣлѣ, если послѣдніе интегралы будутъ приближаться къ конечнымъ величинамъ, то интегралы отъ дополнительныхъ членовъ будутъ приближаться къ нулю.

По этимъ причинамъ уравненія (1) параграфа 2-го получатъ слѣдующій видъ:

$$\iiint\left(\frac{d^2x}{dt^2} - \mathfrak{X}\right)\sigma dO = \iint X_n dS, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\mathbf{1},\ a,\ bis)$$

$$\frac{d\lambda_x}{dt} - \iiint(y\mathfrak{Z} - z\mathfrak{Y})\,\sigma dO = \iint(y_s Z_n - z_s Y_n)\,dS, \quad \ldots\ldots (\mathbf{1},\ d,\ bis)$$

$$\lambda_x = \iiint\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right)\sigma dO;$$

интегрированія распространены по объему и по поверхности части Jn.

Здѣсь выписаны только два уравненія, первое и четвертое, легко по нимъ написать и четыре остальныя.

Такія уравненія должны имѣть мѣсто, какъ для всего тѣла, такъ и для каждой части его, большой или малой.

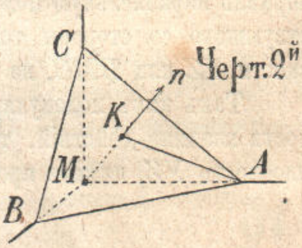
Эти уравненія примѣняются, или къ частямъ тѣла, имѣющимъ конечные размѣры, и тогда они берутся въ томъ видѣ, какъ они здѣсь написаны, или же къ ничтожно-малымъ элементамъ тѣла, къ такимъ элементамъ, размѣры которыхъ неограниченно приближаются къ нулю; но, въ примѣненіи къ такимъ элементамъ, изъ равенствъ (1) выводятъ другія, такъ сказать, предѣльныя уравненія, поступая слѣдующимъ образомъ:

Сначала составляютъ эти равенства для элемента объема, предполагая его размѣры не безконечно-малыми, но ничтожно-малыми, и, перенеся всѣ члены въ первыя части равенствъ, располагаютъ члены каждаго уравненія по порядку ихъ малости, начиная съ членовъ низшаго порядка. Положимъ, что это суть члены втораго порядка малости. Затѣмъ дѣлятъ обѣ части каждаго уравненія на величины, которыя, при уменьшеніи размѣровъ элемента и приближеніи ихъ къ нулю, становятся безконечно-малыми величинами втораго же порядка; послѣ этого низшіе члены въ составленныхъ уравненіяхъ станутъ нулеваго порядка малости, т. е. конечными, тѣ члены, которые были 3-го порядка малости, станутъ теперь 1-го порядка малости, бывшіе 4-го — станутъ 2-го, и т. д. При приближеніи размѣровъ элемента къ нулю, низшіе члены будутъ приближаться къ конечнымъ предѣламъ, прочіе — къ нулю. Полученныя такимъ образомъ равенства и будутъ тѣ, объ которыхъ мы говоримъ теперь и которыя мы могли бы назвать предѣльными уравненіями для безконечно-малыхъ элементовъ деформируемаго тѣла.

§ 9. Примѣненіе уравненій (1) къ элементарному тетраэдру.

Подъ элементарнымъ тетраэдромъ подразумѣваемъ элементъ объема, ограниченный четырьмя гранями; три грани параллельны плоскостямъ координатъ, четвертая наклонена къ нимъ.

Пусть Δx, Δy, Δz суть длины взаимно-перпендикулярныхъ реберъ одного изъ подобныхъ тетраэдровъ, x, y, z — координаты точки M пересѣченія этихъ реберъ, λ, μ, ν = косинусы угловъ, составляемыхъ внѣшнею нормалью n основанія ABC (черт. 2) тетраэдра съ осями координатъ.



Черт. 2й

Пусть K есть основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ M на грань ABC; длину $\overline{MK}$ можно выразить троякимъ образомъ:

$$h = \overline{MK} = \lambda \Delta x = \mu \Delta y = \nu \Delta z,$$

такъ какъ она равняется проэкціи каждаго изъ реберъ MA, MB и MC на направленіе n перпендикуляра MK.

Величина каждой изъ граней MBC, CMA и AMB равняется величинѣ проэкціи площади ABC на соотвѣтственную плоскость координатъ; означивъ величину площади ABC черезъ ω, выразимъ эти соотношенія такъ:

$$\frac{\Delta y \Delta z}{2} = \omega\lambda, \ \frac{\Delta z \Delta x}{2} = \omega\mu, \ \frac{\Delta x \Delta y}{2} = \omega\nu.$$

Величина объема тетраэдра можетъ быть выражена одною шестою частью произведенія длинъ Δx, Δy, Δz, или одною третью произведенія $h\omega$.

Означимъ черезъ F_n напряженіе, дѣйствующее въ точкѣ M на площадку, параллельную плоскости ABC и имѣющую внѣшнею нормалью направленіе n; X_n, Y_n, Z_n будутъ означать проэкціи этого напряженія на оси координатъ.

Напряженіе $F_n(K)$, дѣйствующее въ точкѣ K на единицу площади ABC, будетъ разниться отъ F_n, и по величинѣ, и по направленію, поэтому и проэкціи его $X_n,(K)$, $Y_n(K)$, $Z_n(K)$ на оси координатъ будутъ разниться отъ соотвѣтственныхъ величинъ X_n, Y_n, Z_n для точки M. Но, по предположенію G параграфа 5-го, эти проэкціи суть сплошныя функціи координатъ, поэтому $X_n(K)$ можно выразить въ видѣ ряда, расположеннаго по возрастающимъ степенямъ разностей координатъ точекъ K и M, т. е. такъ:

$$X_n(K) = X_n + \frac{\partial X_n}{\partial x}(x_k - x) + \frac{\partial X_n}{\partial y}(y_k - y) + \frac{\partial X_n}{\partial z}(z_k - z) + \ldots\ldots,$$

гдѣ далѣе идутъ члены съ высшими степенями разностей координатъ; производнымъ отъ X_n по x, y, z должно дать тѣ значенія, какія онѣ имѣюмъ для точки M.

Очевидно, что $(x_k - x)$ равно проэкціи длины MK на ось X-овъ, т. е.: $x_k - x = h\lambda$, и таким же образомъ: $y_k - y = h\mu$, $z_k - z = h\nu$.

Поэтому $X_n(K)$ можно выразить такъ:

$$X_n(K) = X_n + h\beta_1 + \ldots\ldots,$$

гдѣ β_1 есть величина конечная; члены, означенные точками, будутъ имѣть множителями вторыя и высшія степени отъ h.

Далѣе, означимъ черезъ X_x, Y_x, Z_x проэкціи напряженія, дѣйствующаго въ точкѣ M на площадку, перпендикулярную къ оси X-овъ и имѣющую положительную нормаль параллельную положительной оси X-овъ; это суть проэкціи напряженія, дѣйствующаго со стороны той части тѣла, которая находится по правую сторону плоскости YZ или BMC, на часть тѣла, находящуюся влѣво отъ нея.

Такъ какъ молекулярныя силы подчиняются началу равенства и противоположности взаимно-дѣйствій, то напряженіе, дѣйствующее въ точкѣ M слѣва на право на плоскость YZ, имѣетъ проэкціями на оси координатъ величины:

$$-X_x, \ -Y_x, \ -Z_x.$$

Означимъ черезъ X_y, Y_y, Z_y проэкціи напряженія, дѣйствующаго въ точкѣ M на площадку, перпендикулярную къ оси Y-овъ и имѣющую положительною нормалью направленіе параллельное положительной части этой оси; т. е., это суть проэкціи напряженія, дѣйствующаго со стороны той части тѣла, которая находится сзади плоскости ZX, на часть, находящуюся передъ этою плоскостью; наконецъ, означимъ черезъ X_z, Y_z, Z_z проэкціи напряженія, дѣйствующаго въ точкѣ M на площадку перпендикулярную къ оси Z-овъ и имѣющую положительною нормалью положительную часть этой оси.

Составимъ теперь уравненіе (1, a) для одного этого элемента, предполагая его ничтожно-малымъ.

Первая часть уравненія, по мѣрѣ приближенія размѣровъ элемента къ нулю, будетъ приближаться къ величинѣ:

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2} - \mathfrak{X}\right)\sigma\,\frac{dx\,dy\,dz}{6},$$

гдѣ x'' и $\mathfrak{X}$ относятся къ точкѣ M, т. е. суть проэкціи на ось X-овъ ускоренія этой точки и объемной силы въ ней же.

Вторая часть уравненія будетъ состоять изъ суммы четырехъ членовъ, относящихся къ четыремъ гранямъ тетраэдра; для грани ABC наружная нормаль есть n или продолженіе AK, для прочихъ же граней наружными нормалями служатъ направленія, параллельныя отрицательнымъ сторонамъ осей координатъ. По мѣрѣ приближенія размѣровъ элемента къ нулю, вторая часть уравненія (1, a) будетъ приближаться къ слѣдующей величинѣ:

$$X_n(K)\,\omega - X_x\frac{dy\,dz}{2} - X_y\frac{dz\,dx}{2} - X_z\frac{dx\,dy}{2},$$

или

$$X_n\omega + h\omega\beta_1 - X_x\omega\lambda - X_y\omega\mu - X_z\omega\nu.$$

Замѣчая, что въ равенствѣ:

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2} - \mathfrak{X}\right)\sigma\frac{h\omega}{3} = X_n\omega - X_x\omega\lambda - X_y\omega\mu - X_z\omega\nu + h\omega\beta_1 + \ldots.$$

наименьшій порядокъ малости — второй, раздѣлимъ обѣ части его на величину того же порядка малости, а именно на ω, тогда получимъ:

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2} - \mathfrak{X}\right)\sigma\frac{h}{3} = X_n - X_x\lambda - X_y\mu - X_z\nu + h\beta_1 + \ldots.$$

Предположимъ теперь, что размѣры тетраэдра приближаются къ нулю, причемъ отношенія dy и dz къ dx остаются неизмѣнными, такъ что площадка ABC остается параллельною самой себѣ по мѣрѣ приближенія ея къ точкѣ M. При обращеніи h въ нуль, предыдущее равенство обратится въ слѣдующее:

$$X_n = X_x\lambda + X_y\mu + X_z\nu \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(14, } a\textbf{)}$$

Примѣнивъ къ тетраэдру подобнымъ же образомъ равенства (1, b) и (1, c), получимъ еще два равенства:

$$Y_n = Y_x\lambda + Y_y\mu + Y_z\nu, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(14, } b\textbf{)}$$

$$Z_n = Z_x\lambda + Z_y\mu + Z_z\nu \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(14, } c\textbf{)}$$

гдѣ λ, μ, ν суть косинусы угловъ, составляемыхъ съ осями координатъ направленіемъ положительной нормали n къ площадкѣ, проведенной черезъ точку M.

Слѣдовательно, *если будемъ знать значенія величинъ*:

$$X_x,\ Y_x,\ Z_x,\ X_y,\ Y_y,\ Z_y,\ X_z,\ Y_z,\ Z_z$$

для какой либо точки сплошнаго тѣла, то, при помощи формулъ (14), *будемъ имѣть возможность опредѣлить величины и направленіе напряженія* F_n, *дѣйствующаго въ той же точкѣ (и отнесеннаго къ единицѣ площади) на площадку, произвольно оріентированную, т. е. имѣющую нормалью произвольное направленіе.*

Когда мы раздѣляемъ сплошное тѣло на безконечно-малые элементы объема плоскостями параллельными координатнымъ плоскостямъ прямоугольныхъ прямолинейныхъ координатъ и если притомъ наружная поверхность тѣла не имѣетъ остроконечій, то мы можемъ всегда провести дѣлящія плоскости такимъ образомъ, что весь объемъ тѣла будетъ раздѣленъ на элементарные параллелопипеды и на безконечно-малые элементарные тетраэдры; послѣдніе будутъ находиться у поверхности тѣла, такъ что основанія ихъ будутъ элементами его поверхности. Къ каждому такому элементарному тетраэдру мы можемъ примѣнить предыдущія разсужденія, а слѣдовательно, и формулы (14), подразумѣвая подъ n направленіе наружной нормали, возстановленной изъ точки поверхности тѣла.

Слѣдовательно, *формулы* (14) *могутъ быть примѣнены также и къ точкамъ наружной поверхности тѣла, причемъ подъ (n) должно подразумѣвать направленіе наружной нормали, возстановленной къ наружной поверхности изъ разсматриваемой точки, а подъ* X_n, Y_n, Z_n — *проэкціи на оси координатъ внѣшняго напряженія, дѣйствующаго въ этой точкѣ на поверхность тѣла.*

§ 10. Формулы преобразованія интеграловъ, распространенныхъ по замкнутой поверхности, въ интегралы, распространенные по объему, ограничиваемому этою поверхностью.

Пусть имѣемъ интегралъ:

$$\iiint \frac{\partial f}{\partial x} dx\, dy\, dz,$$

распространенный по объему, ограниченному нѣкоторою замкнутою поверхностью, гдѣ f есть какая либо функція отъ x, y, z, сплошная и конечная для всѣхъ точекъ внутри и на поверхности объема.

Этотъ интегралъ весьма легко преобразовать въ интегралъ распространенный по всей поверхности, ограничивающей объемъ.

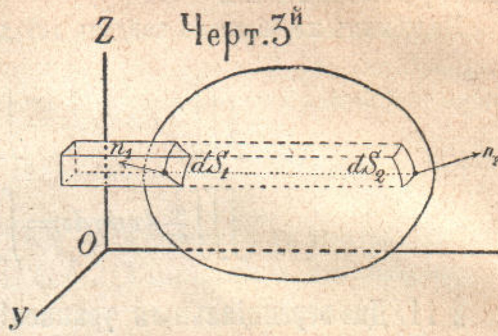
Для этого представимъ себѣ, что объемъ раздѣленъ на безконечно-тонкія призмы, длины которыхъ параллельны оси X-овъ, а сѣченія которыхъ плоскостями параллельными плоскости YZ суть элементарныя площадки $dy\, dz$. Въ каждой изъ такихъ призмъ произведемъ интегрированіе:

$$\int \frac{\partial f}{\partial x} dx\, dy\, dz$$

по x, по всѣмъ элементамъ, изъ которыхъ состоитъ эта призма, получимъ:

$$dy\, dz \int \frac{\partial f}{\partial x} dx = dy\, dz\, (f_2 - f_1).$$

такъ какъ $dy\,dz$ для всей призмы одно и тоже по всей длинѣ ея. Величина f_2 есть значеніе функціи f на томъ элементѣ dS_2 поверхности тѣла, который замыкаетъ призму съ той стороны, гдѣ x имѣетъ бóльшую величину (см. черт. 3-й), а f_1 есть значеніе функціи f на томъ элементѣ dS_1, который замыкаетъ призму съ той стороны, гдѣ x имѣетъ меньшую величину, чѣмъ во всѣхъ остальныхъ частяхъ призмы.



На чертежѣ 3-мъ изображена одна такая призма и элементы dS_2 и dS_1; конечно, такихъ призмъ, на которыя раздѣленъ объемъ, безконечное множество, такъ какъ онѣ безконечно тонки.

Возстановимъ изъ элементовъ поверхности нормали n внаружу тѣла; во всѣхъ элементахъ, такихъ какъ dS_2, въ которыхъ направленіе параллельное положительной оси X-овъ выходитъ изъ объема, нормаль n_2 будетъ составлять острый уголъ съ положительною осью X-овъ, во всѣхъ же элементахъ такихъ какъ dS_1, въ которыхъ вышесказанное направленіе входитъ въ объемъ, нормаль n будетъ составлять тупой уголъ съ положительною осью X-овъ; проэкціи же каждыхъ двухъ элементовъ, принадлежащихъ одной и той же призмѣ, на плоскость YZ, равны площади сѣченія призмы, т. е. $dy\,dz$, такъ что:

$$dS_2 \cos(n_2X) = dy\,dz \dots\dots\dots\dots\dots\dots (\mathbf{15}, a)$$

$$-dS_1 \cos(n_1X) = dy\,dz \dots\dots\dots\dots\dots\dots (\mathbf{15}, b)$$

и вообще, равенства (15, a) имѣютъ мѣсто для всѣхъ элементовъ выхода, гдѣ уголъ (n_2, X) острый, а равенство (15, b) — для всѣхъ элементовъ входа, гдѣ уголъ (n_1, X) — тупой.

Поэтому:

$$\int \frac{\partial f}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = f_2 \cos(n_2X)\, dS_2 + f_1 \cos(n_1X)\, dS_1,$$

а слѣдовательно:

$$\iiint \frac{\partial f}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \iint f_2 \cos(n_2X)\, dS_2 + \iint f_1 \cos(n_1X)\, dS_1,$$

гдѣ первый интегралъ второй части распространенъ на всѣ элементы выхода, второй — на всѣ элементы входа; изъ совокупности тѣхъ и другихъ образуется вся поверхность тѣла, а такъ какъ оба интеграла второй части по виду одинаковы, то получаемъ слѣдующее равенство:

$$\iiint \frac{\partial f}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \iint f_s \cos(nX)\, dS, \dots\dots\dots\dots (\mathbf{16}, a)$$

гдѣ интегралъ второй части распространенъ на всю поверхность объема, n есть нормаль къ элементу поверхности dS, направленная внаружу объема, а f_s = значенiе функцiи f въ элементѣ dS.

Подобнымъ же образомъ найдемъ двѣ другiя формулы преобразованiя:

$$\iiint \frac{\partial f}{\partial y} dx\,dy\,dz = \iint f_s \cos(nY)\, dS \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(16,}\ b\mathbf{)}$$

$$\iiint \frac{\partial f}{\partial z} dx\,dy\,dz = \iint f_s \cos(nZ)\, dS \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(16,}\ c\mathbf{)}$$

§ 11. Дифференцiальныя уравненiя для всѣхъ точекъ сплошнаго деформируемаго тѣла.

Во второй части уравненiя (1, a) § 8-го замѣнимъ величину X_n, находящуюся подъ двойнымъ интеграломъ, слѣдующею суммою:

$$X_x \cos(nX) + X_y \cos(nY) + X_z \cos(nZ)$$

на основанiи равенства (14, a), затѣмъ преобразуемъ интегралы

$$\iint X_x \cos(nX)\, dS, \quad \iint X_y \cos(nY)\, dS, \quad \iint X_z \cos(nZ)\, dS$$

по формуламъ (16) въ интегралы, распространенные по объему части Jn; тогда изъ (1, a, bis) получится такое равенство, заключающее только интегралъ распространенный по объему:

$$\iiint \left[\left(\frac{d^2x}{dt^2} - \mathfrak{X}\right)\sigma - \frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z}\right] dO = 0 \ \ldots\ldots \mathbf{(1,}\ a, A\mathbf{)}$$

Это равенство должно имѣть мѣсто какъ для всего тѣла, такъ и для всѣхъ частей его, даже для самыхъ малѣйшихъ, а для этого необходимо, чтобы во всякой точкѣ тѣла имѣло мѣсто дифференцiальное уравненiе:

$$\sigma \frac{d^2x}{dt^2} = \mathfrak{X}\sigma + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(17,}\ a\mathbf{)}$$

Подобнымъ же образомъ изъ равенствъ (1, b) (1, c) выведемъ два другiя дифференцiальныя уравненiя для той же точки:

$$\sigma \frac{d^2y}{dt^2} = \mathfrak{Y}\sigma + \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}, \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(17,}\ b\mathbf{)}$$

$$\sigma \frac{d^2z}{dt^2} = \mathfrak{Z}\sigma + \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} \ \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(17,}\ c\mathbf{)}$$

Подъ точкою M здѣсь подразумѣвается всякая такая точка сплошнаго тѣла, которая можетъ быть центромъ безконечно-малаго элементарнаго параллелопипеда,

шаемѣ занимаемаго матеріею тѣла; слѣдовательно, *для всякой точки тѣла, хотя бы даже находящейся безконечно-близко къ его наружной поверхности, должны быть удовлетворены дифференціальныя уравненія вида* (17, a, b, c), *заключающія: проэкціи на оси координатъ ускоренія этой точки, проэкціи на тѣ же оси объемныхъ силъ въ этой точкѣ и производныя (по координатамъ) отъ проэкцій напряженій, дѣйствующихъ въ этой точкѣ на площадки, перпендикулярныя къ осямъ координатъ.*

Равенства (17) служатъ основными дифференціальными уравненіями теоріи упругости, гидростатики и гидродинатики.

Возьмемъ теперь равенство (1, d, bis) и замѣнимъ подъ интеграломъ второй части величины Y_n и Z_n выраженіями (14, b), (14, c); тогда она получитъ слѣдующій видъ:

$$\iint (y_s Z_x - z_s Y_x) \cos(nX)\, dS + \iint (y_s Z_y - z_s Y_y) \cos(nY)\, dS +$$
$$+ \iint (y_s Z_z - z_s Y_z) \cos(nZ)\, dS.$$

Каждый изъ этихъ интеграловъ преобразуемъ по соотвѣтственнымъ формуламъ (16) въ интегралы по объему; первый, преобразованный по формулѣ (16, a), обратится въ:

$$\iiint \left(y \frac{\partial Z_x}{\partial x} - z \frac{\partial Y_x}{\partial x} \right) dO,$$

второй, — по формулѣ (16, b), въ слѣдующій:

$$\iiint \left(y \frac{\partial Z_y}{\partial y} + Z_y - z \frac{\partial Y_y}{\partial y} \right) dO,$$

третій, — по формулѣ (16, c), въ слѣдующій:

$$\iiint \left(y \frac{\partial Z_z}{\partial z} - z \frac{\partial Y_z}{\partial z} - Y_z \right) dO.$$

Послѣ этого равенство (1, d, bis) получитъ такой видъ:

$$\iiint y \left(\sigma \frac{d^2 z}{dt^2} - \sigma \mathfrak{Z} - \frac{\partial Z_x}{\partial x} - \frac{\partial Z_y}{\partial y} - \frac{\partial Z_z}{\partial z} \right) dO -$$
$$- \iiint z \left(\sigma \frac{d^2 y}{dt^2} - \sigma \mathfrak{Y} - \frac{\partial Y_x}{\partial x} - \frac{\partial Y_y}{\partial y} - \frac{\partial Y_z}{\partial z} \right) dO = \iiint (Z_y - Y_z)\, dO;$$

но во всякой точкѣ тѣла должны быть удовлетворены дифференціальныя уравненія (17, b) и (17, c), вслѣдствіе чего предыдущее равенство приметъ видъ:

$$\iiint (Z_y - Y_x)\, dO = 0;$$

а такъ какъ это должно имѣть мѣсто для всякой сколь угодно малой части тѣла, то слѣдовательно во всѣхъ точкахъ тѣла должно быть:

$$Z_y = Y_z \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18, a)$$

Подобнымъ же образомъ получимъ:

$$X_z = Z_x, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18, b)$$

$$Y_x = X_y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18, c)$$

изъ равенствъ (1, e, f).

Надо принять во вниманіе, что направленія осей X-овъ, Y-овъ и Z-овъ могутъ быть измѣнены относительно тѣла, такъ что за эти оси можно принять три какія либо взаимно ортогональныя направленія; имѣя въ виду это замѣчаніе, мы можемъ изъ предыдущихъ уравненій вывести слѣдующее заключеніе.

Напряженія F_n и F_k, дѣйствующія въ точкѣ M сплошнаго тѣла на двѣ взаимно-ортогональныя площадки, находятся между собою въ такой зависимости, что:

$$F_n \cos(F_n, k) = F_k \cos(F_k, n), \ldots\ldots\ldots\ldots (19, a)$$

гдѣ n и k означаютъ взаимно-ортогональныя направленія нормалей обѣихъ площадокъ.

Съ помощію же формулъ (14) и на основаніи равенствъ (18) можно показать, что такая зависимость существуетъ не только между напряженіями, дѣйствующими на двѣ взаимно-перпендикулярныя площадки, но и въ тѣхъ случаяхъ, когда эти площадки, проведенныя черезъ одну и ту же точку M, наклонены одна къ другой подъ какимъ бы то ни было угломъ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть λ_1, μ_1, ν_1 суть косинусы угловъ, составляемыхъ съ осями координатъ нормалью k ко второй площадкѣ и X_k, Y_k, Z_k — проэкціи на оси координатъ напряженія F_k, дѣйствующаго на эту площадку. По формуламъ (14) найдемъ, что какъ:

$$F_n \cos(F_n, k) = X_n\lambda_1 + Y_n\mu_1 + Z_n\nu_1,$$

такъ и

$$F_k \cos(F_k, n) = X_k\lambda + Y_k\mu + Z_k\nu$$

окажутся равными суммѣ:

$$X_x\lambda\lambda_1 + Y_y\mu\mu_1 + Z_z\nu\nu_1 + Y_z(\mu\nu_1 + \nu\mu_1) + Z_x(\nu\lambda_1 + \lambda\nu_1) + X_y(\lambda\mu_1 + \mu\lambda_1),$$

а потому равны между собою:

$$F_n \cos (F_n, k) = F_k \cos (F_k, n) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(19)}$$

Это значитъ, что *если черезъ какую либо точку тѣла проведемъ двѣ какія либо площадки, то проэкція на положительную нормаль второй площадки напряженія, дѣйствующаго на первую, равна проэкціи на положительную нормаль первой площадки напряженія, дѣйствующаго на вторую.*

II.

Гидростатика.

§ 12. Уравненія равновѣсія жидкостей.

Разсужденія и формулы предыдущей главы мы примѣнимъ теперь къ ученію о равновѣсіи жидкостей.

Подъ жидкостью мы понимаемъ такое сплошное деформируемое тѣло, которое въ состояніи равновѣсія не оказываетъ и не выдерживаетъ никакихъ тангенціальныхъ напряженій, ни натяженій, но можетъ выдерживать и само оказывать только давленія.

(Сколько извѣстно, всѣ жидкости при своемъ движеніи проявляютъ тангенціальныя напряженія въ видѣ тренія между частями жидкости, а также между жидкостью и тѣлами, съ которыми она граничитъ).

Подъ именемъ жидкостей мы будемъ подразумѣвать въ гидростатикѣ и гидродинамикѣ не только жидкія, но и еще газообразныя вещества. Для отличія первыхъ отъ газообразныхъ веществъ ихъ называютъ *капельными жидкостями*.

Въ большей части вопросовъ гидростатики капельныя жидкости можно предполагать несжимаемыми, вслѣдствіе дѣйствительно малой сжимаемости ихъ подъ вліяніемъ небольшихъ внѣшнихъ давленій.

Газы и тѣ жидкости, сжимаемость которыхъ приходится принимать въ разсчетъ, разсматриваются въ гидростатикѣ подъ именемъ *упругихъ жидкостей*.

Прежде всего разсмотримъ слѣдствія, вытекающія изъ того предположенія, что никакихъ тангенціальныхъ напряженій покоющаяся жидкость ни оказывать, ни испытывать не можетъ.

Возьмемъ какую либо точку M внутри жидкости и проведемъ черезъ нее: какую либо площадку съ положительною нормалью n и три площадки, параллельныя плоскостямъ координатъ.

Такъ какъ тангенціальныхъ напряженій нѣтъ, то напряженіе F_n направлено либо по положительной нормали, либо по противоположному направленію; а, кромѣ того, по той же причинѣ должны быть равны нулю: Y_z и равная ей Z_y, Z_x и равная ей X_z, X_y и равная ей Y_x, такъ какъ это суть проэкціи на оси координатъ тангенціальныхъ напряженій на площадки перпендикулярныя къ осямъ.

Вслѣдствіе этого формулы $(14, a, b, c)$ для точекъ покоющейся жидкости обратятся въ слѣдующія:

$$X_n = X_x\lambda, \quad Y_n = Y_y\mu, \quad Z_n = Z_z\nu,$$

а такъ какъ напряженіе F_n направлено по положительной или отрицательной нормали n, то проэкція F_n на оси координатъ будутъ равны:

$$X_n = \pm F_n\lambda, \quad Y_n = \pm F_n\mu, \quad Z_n = \pm F_n\nu.$$

Сопоставивъ эти равенства съ предыдущими, найдемъ, что:

$$X_x = Y_y = Z_z = \pm F_n,$$

верхній знакъ относится къ тѣмъ случаямъ, когда напряженія суть натяженія, но таковыхъ жидкость ни оказывать, ни выдерживать, по предположенію, не можетъ, поэтому должно быть:

$$X_x = Y_y = Z_z = -F_n,$$

Это значитъ, что нормальныя давленія на всѣ четыре площадки одинаковы, несмотря на то что онѣ оріентированы различнымъ образомъ.

Слѣдовательно, *разсчитанныя на единицу поверхности давленія, дѣйствующія на всякія площадки, проведенныя черезъ одну и ту же точку жидкости, равны между собою, какъ бы различно ни были направлены нормали этихъ площадокъ.*

Это, разсчитанное на единицу поверхности, давленіе жидкости называется *гидростатическимъ давленіемъ;* мы будемъ обозначать величину его черезъ p.

И такъ:

$$X_x = Y_y = Z_z = -p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

$$X_n = -p\lambda, \quad Y_n = -p\mu, \quad Z_n = -p\nu, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

гдѣ λ, μ, ν суть косинусы угловъ, составляемыхъ съ осями координатъ положительною нормалью къ площадкѣ, проведенной черезъ точку M жидкости.

Въ различныхъ точкахъ жидкости гидростатическое давленіе различно и есть нѣкоторая сплошная функція отъ координатъ точки M.

Дифференціальныя уравненія (17) для покоющейся жидкости обратятся въ слѣдующія:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \sigma\mathfrak{X} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (22, a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \sigma\mathfrak{Y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (22, b)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \sigma\mathfrak{Z}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (22, c)$$

которыя должны имѣть мѣсто для всѣхъ точекъ жидкости.

Въ точкахъ поверхности жидкости *внѣшнее* давленіе на элементъ ея поверхности (направленное внутрь жидкости) должно уравновѣшиваться съ давленіемъ самой жидкости на тотъ же элементъ (направленнымъ внаружу жидкости).

Примѣняя уравненія (22) къ покоющейся несжимаемой жидкости, всѣ части которой имѣютъ равную температуру, должно считать σ, плотность жидкости, одинаковымъ во всѣхъ частяхъ ея.

Примѣняя же уравненія (22) къ покоющимся упругимъ жидкостямъ, надо знать, какая существуетъ зависимость между плотностью и гидростатическимъ давленіемъ разсматриваемой жидкости. Для газовъ эта зависимость выражается приближенно такъ:

$$p = \frac{p_0}{\sigma_0}\sigma \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (23, a)$$

гдѣ p_0 есть какое либо опредѣленное гидростатическое давленіе и σ_0 — плотность, соотвѣтствующая этому давленію. Эта зависимость выражаетъ законъ Маріотта, которому газы слѣдуютъ только приблизительно.

Во всякомъ случаѣ для каждой упругой жидкости должна существовать какая либо зависимость между p и σ; пусть

$$\sigma = f(p) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (23)$$

будетъ эта зависимость.

§ 13. Условія равновѣсія жидкости.

Не при всякихъ объемныхъ силахъ жидкость можетъ находиться въ равновѣсіи. Въ уравненіяхъ равновѣсія (22) первыя части равенствъ суть частныя производныя по координатамъ отъ функціи p, сплошной внутри жидкости; если жидкость несжимаемая, т. е. σ есть величина постоянная во всѣхъ точкахъ жидкости, то проэкціи на оси координатъ объемныхъ силъ должны удовлетворять слѣдующимъ дифференціальнымъ уравненіямъ:

$$\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y},\ \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z},\ \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} = \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

Эти уравненія получатся такимъ образомъ: взявъ производную отъ уравненія (22, b) по z и производную отъ уравненія (22, c) по y, и вычтя второе изъ перваго получимъ:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y\, \partial z} - \frac{\partial^2 p}{\partial z\, \partial y} = 0 = \sigma\left(\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y}\right),$$

откуда слѣдуетъ первое изъ уравненій (24).

Такія же условія для проэкцій объемной силы получимъ для возможности равновѣсія жидкости упругой. Въ этомъ случаѣ перенесемъ въ уравненіяхъ (22) плотность σ въ первыя части равенствъ и замѣнимъ σ, по формулѣ (23), функціею отъ p. Тогда эти уравненія можно будетъ представить подъ видомъ:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = \mathfrak{X},\ \frac{\partial \Pi}{\partial y} = \mathfrak{Y},\ \frac{\partial \Pi}{\partial z} = \mathfrak{Z}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

гдѣ П есть функція отъ гидростатическаго давленія p, выражаемая интеграломъ

$$\Pi = \int \frac{dp}{f(p)}, \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \textbf{(26)}$$

а такъ какъ p есть функція отъ x, y, z сплошная внутри жидкости, то и П есть тоже функція отъ x, y, z, сплошная внутри жидкости.

Изъ уравненій (25) заключимъ, также какъ и для несжимаемой жидкости, что объемныя силы должны удовлетворять дифференціальнымъ уравненіямъ (24).

Дифференціальныя уравненія (24) требуютъ, чтобы $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{Z}$ были частными производными по x, по y и по z отъ какой либо функціи U отъ x, y, z:

$$\mathfrak{X} = \frac{\partial U}{\partial x},\ \mathfrak{Y} = \frac{\partial U}{\partial y},\ \mathfrak{Z} = \frac{\partial U}{\partial z} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \textbf{(27)}$$

Эта функція U называется *потенціальною функціею объемныхъ силъ*, а такія объемныя силы называются *объемными силами, имѣющими потенціалъ*.

И такъ, *какъ несжимаемыя, такъ и упругія жидкости могутъ находиться въ покоѣ подъ вліяніемъ такихъ объемныхъ силъ, которыя имѣютъ потенціалъ*.

Все, сказанное въ § 25-мъ кинетики матерьяльной точки относительно потенціальной функціи силъ, приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ, относится также и къ потенціальной функціи объемныхъ силъ, а именно:

а) Черезъ каждую точку того пространства, внутри котораго потенціальная функція U имѣетъ дѣйствительныя значенія, можно провести *поверхность уровня*, на всѣхъ точкахъ которой U будетъ имѣть то же самое численное значеніе, какое имѣетъ и въ разсматриваемой точкѣ.

б) Направленіе объемной силы, дѣйствующей въ разсматриваемой точкѣ, перпендикулярно къ проходящей черезъ нее поверхности уровня и направлено въ сторону возрастающихъ параметровъ поверхностей уровня; величина объемной силы равна корню квадратному изъ суммы квадратовъ частныхъ производныхъ (27).

Подставивъ въ уравненія (22) вмѣсто проэкцій объемной силы частныя производныя (27), помноживъ эти уравненія соотвѣтственно на dx, dy и dz и сложивъ получимъ:

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = \sigma \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right),$$

или

$$dp = \sigma dU,$$

такъ какъ p и U суть функціи только отъ x, y, z и написанные выше трichлены суть полные дифференціалы этихъ функцій.

Полученное дифференціальное уравненіе имѣетъ интегралъ:

$$p = \sigma U + \Gamma, \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \textbf{(28)}$$

гдѣ Г — произвольная постоянная.

Изъ полученнаго интеграла (28) видно, что p, дѣленное на σ, отличается отъ U только на постоянную величину $(\Gamma:\sigma)$ и что, слѣдовательно, *во всѣхъ точкахъ одной и той же поверхности уровня потенціальной функціи гидростатическое давленіе въ покоющейся несжимаемой жидкости имѣетъ одну и ту же величину*; то есть, поверхности уровня силъ суть вмѣстѣ съ тѣмъ и поверхности одинаковаго гидростатическаго давленія.

Отсюда слѣдуетъ, что если несжимаемая покоющаяся жидкость имѣетъ свободную поверхность, внѣшнее давленіе на которой имѣетъ одинаковую величину во всѣхъ точкахъ ея, то эта поверхность должна быть поверхностью уровня тѣхъ объемныхъ силъ, которымъ подвержена жидкость.

Перейдемъ къ разсмотрѣнію условій равновѣсія жидкости упругой.

Изъ уравненій (25) получимъ слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$d\Pi = dU,$$

которое имѣетъ интегралъ:

$$\Pi = U + \Gamma \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(29)}$$

Такъ какъ П есть функція только отъ p, то изъ (29) слѣдуетъ:

$$p = F(U + \Gamma), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(30)}$$

гдѣ F есть функція обратная функціи П отъ p; далѣе, изъ равенства (23) найдемъ выраженіе для σ:

$$\sigma = f(F(U + \Gamma)) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(31)}$$

Изъ равенствъ (30) и (31) видно, что тамъ, гдѣ U постоянно, тамъ постоянны какъ p такъ и σ, т. е. *въ упругой покоющейся жидкости поверхности уровня потенціальной функціи объемныхъ силъ суть вмѣстѣ съ тѣмъ поверхности равнаго гидростатическаго давленія и поверхности одинаковой плотности.*

Если упругая жидкость подчиняется закону Маріотта, то

$$f(p) = \frac{\sigma_0}{p_0}p,\ \ \Pi = \frac{p_0}{\sigma_0}\log p,$$

поэтому формулы (30) и (31) получатъ тогда слѣдующій видъ:

$$p = Ke^{\mu U},\ \ \sigma = \mu K e^{\mu U}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(32)}$$

гдѣ

$$\mu = \frac{\sigma_0}{p_0},\ \ K = e^{\mu\Gamma}.$$

§ 14. Равновѣсіе тяжелой несжимаемой жидкости въ сосудахъ. Давленіе на дно и стѣнки сосуда. Давленіе на плоскую стѣнку. Центръ давленія.

Пусть какая либо тяжелая несжимаемая жидкость находится въ какомъ либо сосудѣ. Расположимъ положительную ось Y-овъ по направленію силы тяжести, оси

X-овъ и Z-овъ горизонтально. Такъ какъ проэкціи на эти оси силы тяжести, разсчитанной на единицу массы, суть:

$$\mathfrak{X} = 0,\ \mathfrak{Y} = g,\ \mathfrak{Z} = 0,$$

то потенціальная функція этой силы будетъ: $U = gy$.

Примѣнивъ сюда формулу (28) предыдущаго параграфа, будемъ имѣть для равновѣсія тяжелой несжимаемой жидкости слѣдующее выраженіе гидростатическаго давленія:

$$p = \sigma g y + \Gamma \qquad (33)$$

Отсюда слѣдуетъ, что поверхности равнаго давленія покоющейся тяжелой жидкости суть горизонтальныя плоскости.

Если во всѣхъ точкахъ свободной части поверхности внѣшнее давленіе имѣетъ одну и ту же постоянную величину, то эта часть поверхности будетъ горизонтальна. Пусть P есть величина внѣшняго давленія на эту поверхность, въ плоскости которой помѣстимъ начало координатъ; въ такомъ случаѣ Γ должно быть равно P и выраженіе (33) получитъ слѣдующій видъ:

$$p = \sigma g y + P \qquad (33,\ a)$$

Давленіе жидкости, находящейся въ сосудѣ, на какой либо ничтожно-малый элементъ дна или стѣнокъ сосуда направлено по нормали къ этому элементу, проведенной внаружу жидкости.

Если дно сосуда горизонтально, то полное давленіе жидкости на всю поверхность его будетъ равно:

$$PS + \sigma g y S,$$

если S есть величина поверхности дна, y — глубина его подъ горизонтомъ свободной поверхности.

Если часть стѣнки сосуда имѣетъ видъ плоской, хотя и негоризонтальной фигуры, то совокупность всѣхъ гидростатическихъ давленій жидкости на эту плоскую фигуру будетъ совокупностью параллельныхъ между собою и перпендикулярныхъ къ плоскости стѣнки силъ, приложенныхъ ко всѣмъ элементамъ этой площади.

Такъ какъ совокупность параллельныхъ и одинаково направленныхъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, всегда можетъ быть уравновѣшена одною силою или приведена къ одной силѣ, то и совокупность гидростатическихъ давленій на плоскую стѣнку можетъ быть приведена къ одной силѣ. Величина этой силы равна суммѣ гидростатическихъ давленій на всю плоскую фигуру, а точка приложенія равнодѣйствующей этихъ параллельныхъ силъ называется *центромъ гидростатическихъ давленій* на эту плоскую фигуру. Мы теперь покажемъ, какъ вычисляется величина равнодѣйствующей такихъ давленій и мѣсто центра ихъ.

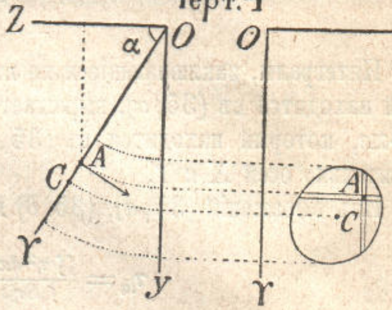
Для упрощенія вычисленій расположимъ плоскость XZ не въ свободной поверхности, но въ такой горизонтальной плоскости, въ которой оно было бы равно нулю, если бы гидростатическое давленіе убывало вверхъ отъ свободной поверхности по тому же закону, по какому оно прибываетъ внизъ. Можно сказать еще иначе: пред-

вообразимъ себѣ, что давленіе P на свободную поверхность удалено, и взамѣнъ его на эту поверхность налить слой той же самой жидкости, на новую свободную поверхность котораго внѣшняго давленія нѣтъ, а толщина слоя такова, что онъ на прежнюю свободную поверхность производитъ гидростатическое давленіе равное P; толщина этого слоя должна быть равна:

$$\frac{P}{g\sigma}.$$

Кромѣ того, помѣстимъ новое начало координатъ и новую ось X-овъ въ плоскости этой фигуры, на которую желаемъ опредѣлить давленіе, а кромѣ оси OY возьмемъ еще другую ось $O\Upsilon$, перпендикулярную къ оси X-овъ и заключающуюся въ плоскости фигуры.

Черт. 4-й



На чертежѣ 4-мъ изображены: слѣва — сѣченіе жидкости и плоской фигуры, а также и плоскости, вертикальною плоскостью $ZO\Upsilon$, справа — представлена плоскость $XO\Upsilon$ и видъ плоской фигуры (какой бы то ни было), на которую требуется опредѣлить давленіе.

Разобьемъ плоскую фигуру на безконечно-малые элементы прямыми, параллельными осямъ X-овъ и Υ-овъ. Пусть A есть одинъ изъ такихъ элементовъ, x и η — координатъ его относительно осей OX и $O\Upsilon$, $dx\,d\eta$ — величина его площади, $y = \eta \sin\alpha$ — координата его по оси Y-овъ, подразумѣвая подъ α уголъ, составляемый плоскостью фигуры съ горизонтомъ. Гидростатическое давленіе на этотъ элементъ будетъ равно теперь площади его, умноженной на $\sigma g y$, такъ какъ теперь гидростатическое давленіе въ плоскости XZ есть нуль.

Поэтому сумма или главный векторъ гидростатическихъ давленій на всю площадь будетъ равна:

$$B = \sigma g \sin\alpha \iint \eta\, dx\, d\eta,$$

гдѣ интегралъ распространенъ на всю площадь фигуры.

Этотъ интегралъ выражаетъ величину статическаго момента площади относительно оси X-овъ и слѣдовательно равняется величинѣ площади, умноженной на разстояніе η_c центра тяжести C площади отъ оси X-овъ, такъ что:

$$B = \sigma g \sin\alpha . S\,\eta_c = \sigma g S\, y_c, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

гдѣ S — величина площади, y_c — разстояніе центра тяжести ея отъ плоскости XZ.

Слѣдовательно, *полное давленіе жидкости на наклонную плоскую площадь равно давленію на такую же горизонтальную площадь, находящуюся на той же самой глубинѣ, на какой находится центръ тяжести наклонной площади.*

Для опредѣленія положенія центра давленій, т. е. центра параллельныхъ силъ, надо составить главные моменты давленій вокругъ осей OX и $O\Upsilon$ и приравнять ихъ

соотвѣтственнымъ моментамъ главнаго вектора B, приложеннаго къ этой точкѣ $Ц$. Главные моменты всей совокупности силъ вокругъ сказанныхъ осей выразятся такъ:

$$\iint p\eta\, dx\, d\eta, \quad \iint px\, dx\, d\eta,$$

гдѣ $p = \sigma g \eta \sin\alpha$; а если $x_ц$ и $\eta_ц$ суть координаты искомаго центра давленій, то моменты приложеннаго къ нему главнаго вектора B будутъ: $B\eta_ц$ и $Bx_ц$. Поэтому:

$$B\eta_ц = \sigma g \sin\alpha \iint \eta^2\, dx\, d\eta, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(35,}\ a\mathbf{)}$$

$$Bx_ц = \sigma g \sin\alpha \iint x\eta\, dx\, d\eta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(35,}\ b\mathbf{)}$$

Интегралы, заключающіеся во вторыхъ частяхъ этихъ выраженій суть: тотъ, который находится въ (35, a), выражаетъ моментъ инерціи площади вокругъ оси X-овъ; тотъ-же, который находится въ (35, b), выражаетъ *произведеніе инерціи* площади относительно осей X и Y.

Изъ выраженій (35, a), (35, b) и (34) слѣдуютъ выраженія:

$$\eta_ц = \frac{\iint \eta^2\, dx\, d\eta}{S\eta_c}, \quad x_ц = \frac{\iint x\eta\, dx\, d\eta}{S\eta_c},$$

изъ которыхъ видно, что *положеніе центра давленій Ц на площади не зависитъ отъ того, подъ какимъ угломъ α наклонена площадь къ горизонту.*

Означимъ черезъ $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$ координаты точекъ площади относительно осей, параллельныхъ осямъ OX, OY, но проведенныхъ черезъ центръ C инерціи площади; примемъ въ разсчетъ, что статическіе моменты площади относительно новыхъ осей равны нулю и означимъ черезъ A_c моментъ инерціи площади относительно новой оси X-овъ и черезъ F_c—произведеніе инерціи относительно новыхъ же центральныхъ осей. Какъ намъ уже извѣстно:

$$\iint \eta^2\, dx\, d\eta = S\eta_c^2 + A_c,$$

а теперь легко найдемъ слѣдующее равенство:

$$\iint x\eta\, dx\, d\eta = Sx_c\eta_c + F_c,$$

если подставимъ подъ интеграломъ $(x_c + \mathfrak{x})$ вмѣсто x и $(\eta_c + \mathfrak{y})$ — вмѣсто η.

Поэтому предыдущія выраженія для $x_ц$ и $\eta_ц$ обратятся въ слѣдующія:

$$\eta_ц = \eta_c + \frac{A_c}{S\eta_c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(36,}\ a\mathbf{)}$$

$$x_ц = x_c + \frac{F_c}{S\eta_c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(36,}\ b\mathbf{)}$$

Первая изъ этихъ формулъ выражаетъ, что центръ давленій находится на оси симметріи площади вокругъ оси привѣса OX.

§ 15. Совокупность давленій жидкости на погруженное тѣло. Законъ Архимеда.

Давленіе несжимаемой покоющейся жидкости, подверженной силѣ тяжести, на какую-либо поверхность, есть совокупность нормальныхъ гидростатическихъ давленій, дѣйствующихъ на всѣ элементы этой поверхности.

Составимъ выраженія проэкцій главнаго вектора и главнаго момента гидростатическихъ давленій на всю поверхность тѣла, вполнѣ погруженнаго въ жидкость.

Пусть dS есть одинъ изъ элементовъ поверхности тѣла, x_s, y_s, z_s — его координаты; означимъ черезъ N направленіе нормали къ поверхности тѣла, проведенной изъ точки элемента dS внаружу тѣла и, значитъ, внутрь жидкости.

Проэкціи на оси координатъ силы гидростатическаго давленія, приложенной къ элементу dS будутъ:

$$-p_s \cos(N, X)\, dS, \quad -p_s \cos(N, У)\, dS, \quad -p_s \cos(N, Z)\, dS,$$

поэтому проэкціи главнаго вектора и главнаго вокругъ начала координатъ момента совокупности давленій на всю поверхность выразятся слѣдующими интегралами:

$$B_x = -\iint p_s \cos(N, X)\, dS, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathbf{37},\, a)$$

$$B_y = -\iint p_s \cos(N, У)\, dS, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathbf{37},\, b)$$

$$B_z = -\iint p_s \cos(N, Z)\, dS, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathbf{37},\, c)$$

$$Л_x = -\iint p_s \left(y_s \cos(N, Z) - z_s \cos(N, У)\right) dS, \ldots\ldots\ldots (\mathbf{38},\, a)$$

$$Л_y = -\iint p_s \left(z_s \cos(N, X) - x_s \cos(N, Z)\right) dS, \ldots\ldots\ldots (\mathbf{38},\, b)$$

$$Л_z = -\iint p_s \left(x_s \cos(N, У) - y_s \cos(N, X)\right) dS \ldots\ldots\ldots (\mathbf{38},\, c)$$

гдѣ интегралы распространены на всю замкнутую поверхность вполнѣ погруженнаго въ жидкость тѣла.

Преобразуемъ теперь эти интегралы по формуламъ (16) § 10-го предыдущей главы въ интегралы, распространенные по всему объему погруженнаго тѣла; но прежде этого мы предположимъ, что значенія p и поверхности равнаго давленія продолжены внутрь тѣла по тому же закону, какому они слѣдуютъ въ жидкости, то есть, что во всякой точкѣ внутри тѣла мы даемъ функціи p то самое значеніе, которое оно имѣло

бы, если бы мѣсто тѣла занимала покоющаяся несжимаемая жидкость, такая же самая, въ какую погружено тѣло.

Вслѣдствіе этого преобразованія, формулы $(37, a)$ и $(38, a)$ получатъ слѣдующій видъ:

$$B_x = -\iiint \frac{\partial p}{\partial x} dO; \quad Л_x = -\iiint \left(y \frac{\partial p}{\partial z} - z \frac{\partial p}{\partial y}\right) dO;$$

но для тяжелой несжимаемой жидкости, находящейся въ покоѣ, частныя производныя отъ p по x и по z равны нулю, а

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \sigma g,$$

если ось $У$-овъ направлена параллельно силѣ тяжести.

Совершивъ преобразованія по формуламъ (16) надъ выраженіями (37) и (38), мы, слѣдовательно, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} B_x &= 0, \\ B_y &= 0, \\ B_z &= -\sigma g V, \end{aligned}\right\} \ldots (39) \qquad \left.\begin{aligned} Л_x &= \sigma g \iiint z dO = \sigma g V z_ц, \\ Л_y &= 0, \\ Л_z &= -\sigma g \iiint x dO = -\sigma g V x_ц, \end{aligned}\right\} \ldots (40)$$

гдѣ:

$$V = \iiint dO$$

есть величина объема погруженнаго тѣла, а интегралы въ выраженіяхъ $Л_x$ и $Л_z$ суть величины статическихъ моментовъ этого объема относительно плоскостей $XУ$ и $УZ$; $x_ц$ и $z_ц$ суть координаты центра инерціи массы однородной плотности, заполняющей объемъ V.

Какъ извѣстно изъ статики твердаго тѣла, совокупность какихъ либо силъ, приложенныхъ къ *твердому* тѣлу, можно уравновѣсить вообще двумя силами; если же главный моментъ совокупности силъ перпендикуляренъ къ главному вектору, то тогда совокупность силъ можетъ быть уравновѣшена только одною силою.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть B_x, B_y, B_z суть проэкціи на оси координатъ главнаго вектора B совокупности силъ, приложенныхъ къ *твердому* тѣлу, а $Л_x$, $Л_y$, $Л_z$—проэкціи главнаго момента $Л_0$ этой совокупности вокругъ начала координатъ.

Положимъ, что силы, приложенныя къ точкамъ свободнаго твердаго тѣла, не уравновѣшиваются между собою, т. е., что всѣ или нѣкоторыя изъ шести величинъ:

$$B_x, B_y, B_z, Л_x, Л_y, Л_z$$

не равны нулю; спрашивается, нельзя ли уравновѣсить эту совокупность силъ одною силою, приложенною къ нѣкоторой точкѣ того же тѣла?

Означимъ черезъ X, $У$, Z проэкціи искомой силы на оси координатъ и черезъ x, y, z координаты точки ея приложенія.

Чтобы данная совокупность силъ уравновѣсилась этою силою, необходимо, чтобы были удовлетворены равенства:

$$X + B_x = 0,\ У + B_y = 0,\ Z + B_z = 0,$$

$$Л_x + yZ - zУ = 0,\ Л_y + zX - xZ = 0,\ Л_z + xУ - yX = 0.$$

Изъ нихъ можно составить слѣдующее равенство:

$$B_x Л_x + B_y Л_y + B_z Л_z = - X(zУ - yZ) - У(xZ - zX) - Z(yX - xУ),$$

вторая часть котораго, очевидно, равна нулю; поэтому и первая часть его должна быть равна нулю, если данную совокупность силъ можно уравновѣсить одною силою.

Слѣдовательно, *для того, чтобы данную совокупность силъ, приложенныхъ къ свободному твердому тѣлу, можно было уравновѣсить одною силою, необходимо, чтобы было удовлетворено условіе:*

$$B_x Л_x + B_y Л_y + B_z Л_z = 0, \qquad (41)$$

т. е., чтобы главный моментъ и главный векторъ данной совокупности силъ были взаимно перпендикулярны и чтобы притомъ главный векторъ не былъ равенъ нулю.

Изъ выраженій (39) и (40) оказывается, что главный векторъ и главный моментъ гидростатическихъ давленій на поверхность вполнѣ погруженнаго тѣла взаимно перпендикулярны; изъ этого слѣдуетъ, что *если вполнѣ погруженное въ жидкость тѣло будетъ твердое, то совокупность гидростатическихъ давленій на его поверхность можетъ быть уравновѣшена одною силою.*

Изъ выраженій (39) и (40) прямо видно, что величина уравновѣшивающей силы равна $\sigma g V$, т. е. вѣсу вытѣсняемаго тѣломъ объема жидкости, что направленіе ея совпадаетъ съ направленіемъ силы тяжести и что точка приложенія этой силы должна совпадать съ центромъ $Ц$ инерціи объема V.

Слѣдовательно, *гидростатическія давленія на поверхность твердаго тѣла, вполнѣ погруженнаго въ тяжелую несжимаемую покоющуюся жидкость, приводятся къ одной силѣ, направленной снизу вверхъ, равной вѣсу вытѣсняемаго тѣломъ объема жидкости и приложенной къ центру тяжести объема;* это и есть извѣстный законъ Архимеда.

Разсмотримъ теперь какъ выражаются главный векторъ и главный моментъ совокупности гидростатическихъ давленій и давленій атмосферы на тѣло не вполнѣ погруженное въ покоющуюся жидкость.

Мы предположимъ, что та часть поверхности тѣла, которая не находится въ жидкости, выступаетъ изъ нея, подвержена тому же самому внѣшнему давленію P на единицу поверхности, какому подвержена свободная поверхность жидкости. Въ дѣйствительности такъ именно и дѣйствуетъ давленіе атмосферы.

Въ такомъ случаѣ проэкціи главнаго вектора всѣхъ давленій на поверхность тѣла и главнаго момента ихъ выразятся интегралами (37) и (38), распространенными на всю

поверхность тѣла, но только надо имѣть въ виду, что во всѣхъ элементахъ поверхности, подвергающихся давленію атмосферы, давленіе p_s имѣетъ одинаковую величину P.

Произведя надъ интегралами (37) и (38) преобразованіе по формуламъ (16-мъ), мы должны теперь предположить, что внутри той части объема тѣла, которая находится выше продолженной внутрь тѣла свободной поверхности жидкости, p имѣетъ постоянную величину P; вслѣдствіе этого производная отъ p по y въ этой части объема тѣла равна нулю, а въ остальной части объема, находящейся ниже продолженной свободной поверхности, по прежнему:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \sigma g.$$

По этимъ причинамъ *проэкціи главнаго вектора и главнаго момента гидростатическихъ и атмосферныхъ давленій на поверхность не вполнѣ погруженнаго въ жидкость тѣла выразятся опять формулами* (39) и (40), *но теперь V выражаетъ объемъ не всего тѣла, а только измѣщающій жидкость объемъ, т. е. ту часть объема тѣла, которая находится ниже уровня свободной поверхности; $x_ц$ и $z_ц$ суть координаты центра тяжести этого объема.*

Если полупогруженное въ покоющуюся несжимаемую жидкость тѣло есть твердое, то совокупность всѣхъ гидростатическихъ и атмосферныхъ давленій на поверхность тѣла приводится къ одной силѣ, направленной снизу вверхъ, равной вѣсу измѣщеннаго объема жидкости и приложенной къ центру тяжести измѣщеннаго объема.

§ 16. Условія равновѣсія и устойчивости равновѣсія тяжелаго твердаго тѣла, плавающаго въ несжимаемой тяжелой покоющейся жидкости.

Для равновѣсія тяжелаго твердаго тѣла, плавающаго въ тяжелой жидкости, необходимо:

1) чтобы вѣсъ жидкости, вытѣсненной погруженною частью тѣла, былъ равенъ вѣсу тѣла;

2) чтобы центръ C тяжести тѣла былъ на одной вертикальной линіи съ центромъ $Ц$ измѣщеннаго объема жидкости.

Твердое тѣло, удѣльный вѣсъ котораго равняется удѣльному вѣсу жидкости, будетъ въ равновѣсіи, когда оно будетъ вполнѣ погружено въ жидкость и когда центръ C его тяжести и центръ тяжести $Ц$ его объема будутъ на одной вертикальной линіи, потому что тогда главный векторъ и главный моментъ всѣхъ силъ приложенныхъ къ тѣлу равны нулю.

Черт. 5й



Черт. 6й



Такое положеніе равновѣсія будетъ устойчивымъ тогда, когда центръ $Ц$ будетъ выше центра тяжести тѣла C и будетъ неустойчивымъ въ противоположномъ случаѣ. Въ самомъ дѣлѣ, въ первомъ случаѣ, при отклоненіи линіи $ЦC$ отъ вертикальнаго положенія, пара силъ $ЦP$ и CP' (черт. 5) будетъ стремиться уменьшить уголъ φ, во второмъ же случаѣ (черт. 6) будетъ стремиться увеличить этотъ уголъ, т. е. опрокинуть тѣло (CP' изображаетъ вѣсъ тѣла).

Относительно же всякихъ поступательныхъ перемѣщеній тѣла оба положенія равновѣсія безразличны, пока тѣло не выступаетъ изъ жидкости.

Можно сказать, что твердое тѣло, удѣльный вѣсъ котораго равняется удѣльному вѣсу жидкости, будучи погружено въ нее, имѣетъ два положенія равновѣсія, одно устойчивое, другое неустойчивое.

Твердое тѣло, удѣльный вѣсъ котораго менѣе удѣльнаго вѣса жидкости, имѣетъ не менѣе двухъ, а большею частію нѣсколько положеній равновѣсія, для опредѣленія которыхъ поступаютъ нижеслѣдующимъ образомъ.

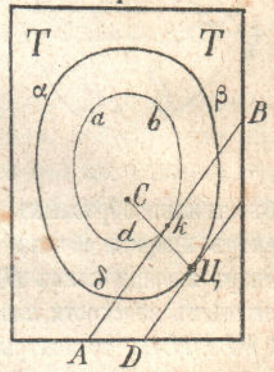
Прежде всего слѣдуетъ провести плоскость AB (черт. 7), отдѣляющую отъ тѣла TT (черт. 7, на которомъ изображены сѣченія тѣла и поверхностей, объ которыхъ будетъ рѣчь впереди, плоскостью чертежа) объемъ ADB, величина котораго V должна равняться величинѣ отношенія:

$$V = \frac{M}{\sigma},$$

гдѣ M — масса тѣла, σ — плотность жидкости.

Очевидно, что можно провести безчисленное множество такихъ плоскостей, удовлетворяющихъ этому требованію и что всѣ такія плоскости обвертываютъ нѣкоторую замкнутую поверхность, которую мы назовемъ *поверхностью сѣченій* (пусть abd представляетъ линію пересѣченія этой поверхности плоскостью чертежа 7-го): сѣкущія плоскости AB мы будемъ называть *плоскостями плаванія*.

Черт. 7й



Положенія центра инерціи $Ц$ отсѣченнаго объема ADB, соотвѣтствующія всевозможнымъ положеніямъ плоскости плаванія по отношенію къ тѣлу, образуютъ собою другую поверхность, называемую *поверхностью центровъ.* (На чертежѣ 7-мъ линія $\alpha\beta\delta$ изображаетъ кривую пересѣченія этой поверхности плоскостью чертежа).

Если соединить центръ инерціи C тѣла съ какою либо точкою $Ц$ поверхности центровъ прямою $CЦ$, то, вообще говоря, эта прямая не будетъ перпендикулярна къ соотвѣтствующей плоскости плаванія AB. Поэтому, если помѣстить тѣло въ жидкость такъ, чтобы какая бы то ни было плоскость плаванія AB совмѣстилась съ уровнемъ свободной поверхности, то тѣло въ этомъ положеніи въ равновѣсіи не останется, потому что центры C и $Ц$ не находятся на одной вертикальной линіи.

Однако, найдутся навѣрно два, а можетъ быть и болѣе такихъ положеній точки $Ц$, въ которыхъ прямая $CЦ$ окажется перпендикулярною къ соотвѣтственной плоскости плаванія. Такія положенія точки $Ц$ и плоскости плаванія соотвѣтствуютъ положеніямъ равновѣсія тѣла.

Если поверхность тѣла болѣе или менѣе правильна и имѣетъ симметрію относительно трехъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостей, или есть поверхность вращенія, и если центръ тяжести C тѣла находится на одной изъ осей пересѣченія этихъ плоскостей или на оси вращенія, то нѣкоторые изъ положеній равновѣсія тѣла очевидны и безъ построенія поверхностей сѣченій и центровъ. Такъ, напримѣръ, понятно само по себѣ, что для однороднаго эллипсоида о трехъ осяхъ и для всякаго однороднаго тѣла, имѣющаго три плоскости симметріи, возможны шесть положеній равновѣсія, въ каждомъ изъ которыхъ плоскость плаванія параллельна одной изъ плоскостей симметріи. Для однороднаго тѣла вращенія, имѣющаго, кромѣ оси симметріи, еще эквато-

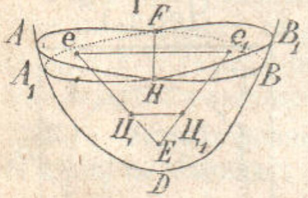
ріальную плоскость симметріи (эллипсоидъ вращенія, круговой цилиндръ, и т. п.) возможны положенія равновѣсія: вертикальное и безчисленное множество горизонтальныхъ. Для однороднаго шара число положеній равновѣсія безконечно-велико, такъ какъ во всякомъ его положеніи центръ инерціи погруженной части будетъ на одной вертикальной линіи съ центромъ тяжести однороднаго шара.

Возьмемъ теперь неоднородный эллипсоидъ, центръ тяжести котораго находится на большой оси его, но не въ центрѣ. Въ этомъ случаѣ очевидны два положенія равновѣсія, при которыхъ большая ось эллипсоида будетъ вертикальна; но существуютъ ли еще положенія и каковы они, — для отвѣта на эти вопросы придется строить или опредѣлять видъ поверхностей сѣченій и центровъ.

Полное опредѣленіе всѣхъ возможныхъ положеній равновѣсія значительно облегчается при помощи слѣдующей теоремы.

Касательныя плоскости къ поверхности центровъ параллельны плоскостямъ плаванія, соотвѣтствующимъ точкамъ касанія.

Черт. 8



Нетрудно доказать эту теорему. Пусть AB (черт. 8) есть которое либо положеніе плоскости плаванія, $Ц$ — соотвѣтственная ей точка поверхности центровъ. Проведемъ какое либо другое сосѣднее положеніе A_1B_1 плоскости плаванія и пусть $Ц_1$ — соотвѣтственная точка поверхности центровъ. Оба положенія плоскости пересѣкаются по прямой FH.

Оба объема ABD и $A_1B_1D_1$ равны между собою; а такъ какъ они имѣютъ общую часть: A_1FBDHA_1, то и объемы клинообразныхъ частей: $AFHA_1$ и $BHFB_1$ равны между собою. Пусть E есть центръ инерціи объема A_1FBDHA_1, e — центръ инерціи клина $AFHA_1$ и e_1 — центръ инерціи клина $BHFB_1$. Такъ какъ объемъ ABD, отсѣкаемый первымъ положеніемъ плоскости плаванія, равенъ суммѣ объемовъ клина $AFHA_1$ и общей части A_1FBDHA_1, то центры инерціи e, $Ц$, E должны лежать на одной прямой и отношеніе величинъ разстояній $Цe$ и $EЦ$ должно равняться величинѣ отношенія объема общей части A_1FBDHA_1 къ объему клина. По такой же самой причинѣ и центры инерціи e_1, $Ц_1$ и E должны тоже лежать на одной прямой и отношеніе разстояній $Ц_1e_1$ и $EЦ_1$ должно равняться величинѣ отношенія объема A_1FBDHA_1 къ объему клина; слѣдовательно:

$$\frac{Цe}{EЦ} = \frac{Ц_1e_1}{EЦ_1}$$

и стало быть прямая $ЦЦ_1$ параллельна прямой ee_1.

Представимъ себѣ теперь, что мы приближаемъ положеніе A_1B_1 плоскости плаванія до совпаденія съ положеніемъ AB; соотвѣтственно этому и точка $Ц_1$ поверхности центровъ будетъ сближаться съ точкою $Ц$, причемъ направленіе $ЦЦ_1$ будетъ приближаться къ совпаденію съ касательною плоскостью, проведенною къ поверхности центровъ въ точкѣ $Ц$, а въ предѣлѣ оно и ляжетъ въ эту поверхность. По мѣрѣ того же приближенія плоскости A_1B_1 къ плоскости AB, точки e_1 и e сближаются съ послѣднею и въ предѣлѣ прямая ee_1 совпадетъ съ плоскостью AB. Имѣя въ виду, что и въ предѣлѣ направленія ee_1 и $ЦЦ_1$ параллельны между собою и что сказанное нами относится къ точкамъ $Ц_1$ (и къ соотвѣтственнымъ плоскостямъ A_1B_1), взятымъ въ

гахъ направленія по сосѣдству съ $Ц$, мы можемъ заключить, что дѣйствительно касательная плоскость къ поверхности центровъ въ $Ц$ параллельна плоскости плаванія AB.

Изъ этой теоремы слѣдуетъ, что *положеніямъ равновѣсія соотвѣтствуютъ тѣ точки $Ц$ поверхности центровъ, въ которыхъ прямая $СЦ$ нормальна къ поверхности.*

Слѣдовательно, чтобъ опредѣлить всѣ положенія равновѣсія тѣла, надо построить поверхность центровъ и опустить на нее нормали изъ центра тяжести тѣла; найденныя такимъ образомъ точки поверхности центровъ будутъ служить центрами тяжести вытѣсненной жидкости при положеніяхъ равновѣсія.

Такъ, въ вышеупомянутомъ примѣрѣ неоднороднаго эллипсоида, поверхность центровъ будетъ также эллипсоидомъ подобнымъ наружному; изъ центра C тяжести, находящагося на большой оси, можно опустить еще четыре нормали на поверхность эллипсоида, кромѣ тѣхъ, которыя совпадаютъ съ большою осью; эти четыре нормали находятся по двѣ въ двухъ главныхъ діаметральныхъ плоскостяхъ эллипсоида, проходящихъ черезъ большую ось. Слѣдовательно, и такой эллипсоидъ имѣетъ шесть положеній равновѣсія въ жидкости, столько же, сколько и однородный.

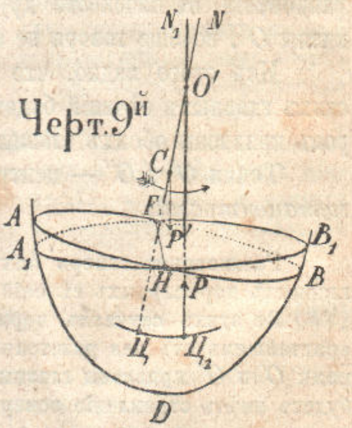
Разсмотримъ теперь условія устойчивости положеній равновѣсія твердаго тяжелаго тѣла, плавающаго въ тяжелой жидкости, но не вполнѣ погруженнаго.

Всѣ положенія равновѣсія устойчивы для такихъ поступательныхъ перемѣщеній, при которыхъ тѣло опускается или подымается. Въ самомъ дѣлѣ, при опусканіи тѣла, объемъ вытѣсняемой жидкости увеличивается, сила дѣйствующая снизу вверхъ получаетъ преобладаніе надъ вѣсомъ тѣла и избытокъ ея надъ послѣдней стремится приподнять тѣло; обратно, при подыманіи тѣла, объемъ вытѣсняемой жидкости уменьшается, а съ нимъ и величина силы дѣйствующей снизу вверхъ и надъ ней получаетъ преобладаніе вѣсъ тѣла.

Для поступательныхъ перемѣщеній, при которыхъ тѣло не опускается и не подымается, всѣ положенія равновѣсія безразличны.

Если твердое тѣло, находившееся въ положеніи равновѣсія, будетъ отклонено изъ этого положенія, такъ что линія $СЦ_1$, соединяющая центръ тяжести тѣла съ центромъ тяжести новаго измѣщеннаго объема не будетъ уже вертикальною, то, для сужденія объ устойчивости положенія равновѣсія, придется разсмотрѣть, стремится ли пара силъ CP' (вѣсъ тѣла) и $Ц_1P$ (давленіе жидкости) возвратить тѣло въ положеніе равновѣсія или же еще далѣе опрокинуть его.

Черт. 9й



Положеніе равновѣсія будетъ несомнѣнно устойчивымъ, если точка C ниже части поверхности центровъ, ближайшей къ $Ц$.

Если точка C выше точки $Ц$, то положеніе равновѣсія можетъ быть устойчивымъ, если будутъ соблюдены нѣкоторыя условія, какъ мы увидимъ ниже.

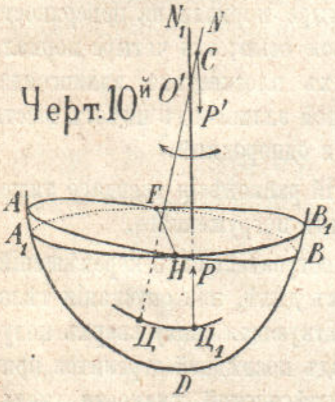
Сначала разсмотримъ такія весьма малыя отклоненія, при которыхъ нормаль $Ц_1N_1$, возстановленная къ поверхности центровъ изъ новаго положенія центра $Ц_1$

измѣщенной жидкости, пересѣкаетъ нормаль $ЦN$ возстановленную изъ центра $Ц$ соотвѣтствующаго положенію равновѣсія.

Какъ извѣстно, если возстановить нормаль изъ какой либо точки кривой поверхности, то другая нормаль, возстановленная изъ безконечно-близкой сосѣдней точки, пересѣчетъ первую нормаль только въ томъ случаѣ, когда сосѣдняя точка взята въ плоскости одного изъ двухъ главныхъ нормальныхъ сѣченій поверхности, проведеннаго черезъ первую нормаль; притомъ точки пересѣченій будутъ центрами кривизны главныхъ нормальныхъ сѣченій.

Поэтому отклоненія тѣла изъ положенія равновѣсія, разсматриваемыя нами теперь, предполагаются ничтожно-малыми и происшедшими не въ произвольномъ направленіи, но въ одной изъ двухъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостей главныхъ нормальныхъ сѣченій поверхности центровъ, проведенныхъ черезъ нормаль $ЦN$.

Черт. 10й



Если, какъ мы предполагаемъ, отклоненіе ничтожно мало, то новая нормаль $Ц_1N_1$ (черт. 9 и 10) пересѣчетъ нормаль $ЦN$ въ центрѣ O' кривизны нормальнаго сѣченія $ЦЦ_1$ проведеннаго черезъ нормаль точки $Ц$.

По направленію $Ц_1O'N_1$ будетъ, въ отклоненномъ положеніи тѣла, дѣйствовать на него равнодѣйствующая давленій, а по направленію CP', параллельному и прямо-противоположному первому, дѣйствуетъ вѣсъ тѣла.

Если центръ O' кривизны нормальнаго сѣченія выше центра тяжести C тѣла, какъ на чертежѣ 9-мъ, то вышесказанная пара силъ стремится повернуть тѣло въ сторону означенною оперенною стрѣлкою, т. е. вернуть его въ положеніе равновѣсія.

Если же центръ O ниже центра тяжести C, какъ на чертежѣ 10-мъ, то пара силъ стремится повернуть тѣло въ сторону, означенную неоперенною стрѣлкою, т. е. опрокинуть тѣло.

То же самое должно сказать и объ отклоненіяхъ тѣла (изъ того же положенія равновѣсія) въ плоскости другаго нормальнаго сѣченія, имѣющаго свой центръ кривизны O'', вообще говоря не совпадающій съ центромъ кривизны перваго сѣченія.

Изъ этого видно, что положеніе равновѣсія тѣла для отклоненія въ плоскостяхъ главныхъ сѣченій будетъ устойчиво, если центръ тяжести C лежитъ ниже центровъ кривизны обоихъ главныхъ нормальныхъ сѣченій.

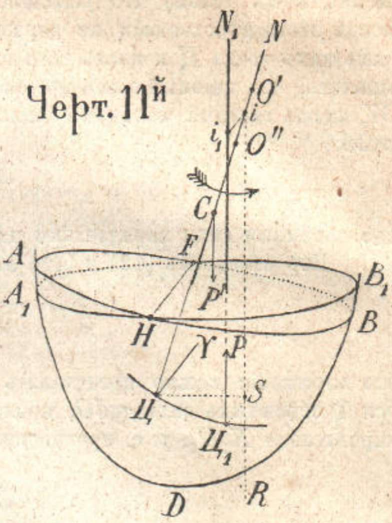
Точки O' и O'' — центры кривизны главныхъ нормальныхъ сѣченій, называются *метацентрами*.

Разсмотримъ теперь ничтожно-малыя отклоненія, происшедшія не въ плоскостяхъ главныхъ нормальныхъ сѣченій поверхности центровъ въ точкѣ $Ц$.

Въ этихъ случаяхъ нормаль $Ц_1N_1$ не пересѣчетъ нормаль $ЦN$, но пройдетъ въ кратчайшемъ отъ нея разстояніи i_1i близъ нѣкоторой точки i, находящейся *между* центрами O' и O'' кривизны главныхъ нормальныхъ сѣченій (черт. 11). Пара силъ CP' и $ЦP$ будетъ имѣть стремленіе повернуть тѣло вокругъ оси перпендикулярной къ плоскости этой пары; эта ось не только не параллельна направленію ii_1, но составляетъ съ нимъ прямой уголъ, если точка C совпадаетъ съ точкою i; вообще же эта ось составляетъ съ направленіемъ ii_1 уголъ тѣмъ меньшій, чѣмъ точка C дальше отъ i. Мы обратимъ вниманіе только на составляющую пары силъ CP' и $ЦP$, дѣйствующую въ плоскости перпендикулярной къ ii_1; эта составляющая стремится повернуть тѣло въ сторону, указанную на чертежѣ

...ренною стрѣлкою, т. е. стремится вернуть его въ положеніе равновѣсія, если C ... если же C выше i, то составляющая пары въ плоскости перпендикулярной къ ii_1 ... опрокинуть тѣло.

...ерь можемъ заключить, что *тѣ положенія рав... которыхъ оба метацентра выше центра ... тѣла, устойчивы для всякихъ малыхъ от... тѣла; тѣ положенія, въ которыхъ оба ме...ра ниже центра тяжести тѣла — неустой... ля всякихъ отклоненій; тѣ положенія, въ ко... одинъ метацентръ выше, а другой ниже ... тяжести, устойчивы для нѣкоторыхъ малыхъ ...ній, неустойчивы для прочихъ.*



Черт. 11й

Разсмотримъ теперь какимъ образомъ можно вы... величины радіусовъ кривизны $ЦO'$ и $ЦO''$ ...ыхъ нормальныхъ сѣченій поверхности центровъ; ... вычислять эти длины необходимо для того, что... ло возможно опредѣлять положенія метацент... O' и O''.

Проведемъ изъ точки i прямую iR параллель... ормали $N_1Ц_1$ и на проведенную прямую опу... перпендикуляръ $ЦS$ изъ точки $Ц$; длину этого ...дикуляра можно выразить такъ: $Цi \sin \varphi$, гдѣ φ ... уголъ отклоненія $ЦiR$; по малости же угла φ длину перпендикуляра $ЦS$ можно вы... такимъ произведеніемъ:

$$\overline{ЦS} = \overline{Цi}\, \varphi'' \sin 1''.$$

Съ другой стороны, длина этого перпендикуляра равна плечу силы $Ц_1P$ вокругъ ... роведенной черезъ точку $Ц$ перпендикулярно къ плоскости $ЦiR$ и стало быть ...лельно направленію кратчайшаго разстоянія ii_1. Между прочимъ замѣтимъ, что ... же направленію параллельно направленіе FH прямой пересѣченія двухъ положе... лоскости плаванія, такъ какъ эти плоскости перпендикулярны къ соотвѣтственнымъ ...лямъ.

Произведеніе изъ величины силы $Ц_1P$ на плечо $ЦS$ выражаетъ величину момента ... $Ц_1P$ вокругъ оси Υ, проведенной изъ точки $Ц$ параллельно направленію отъ H къ F.

Какъ намъ уже извѣстно, сила $Ц_1P$ есть равнодѣйствующая гидростатическихъ дав... или же равнодѣйствующая воображаемыхъ объемныхъ силъ, приложенныхъ къ эле...мъ погруженнаго въ жидкость объема $A_1HDB_1FA_1$, направленныхъ снизу вверхъ ...лельно $Ц_1N_1$ и равныхъ g (такъ что на элементъ dO дѣйствуетъ воображаемая ...ная сила $\sigma g dO$ снизу вверхъ параллельно $Ц_1N_1$).

Объемъ же $A_1HDB_1FA_1$ состоитъ изъ объема A_1HDBFA_1, который мы усло... для краткости обозначать черезъ W, и изъ объема v_1 клина $FHBB_1$. Если обо...ъ моментъ силы $Ц_1P$ вокругъ оси Υ (черт. 11) знакомъ $Л_1$, а моменты вокругъ ... же оси воображаемыхъ объемныхъ силъ, приложенныхъ къ элементамъ объемовъ W ... — знаками $Л(W)$, $Л(v_1)$, то можемъ написать равенство:

$$Ц_1P.\overline{ЦS} = Л_1 = Л(W) + Л(v_1), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(42)}$$

...ающее, что моментъ силы $Ц_1P$ равенъ суммѣ моментовъ воображаемыхъ объем... силъ, приложенныхъ къ элементамъ двухъ вышесказанныхъ объемовъ.

Когда тѣло было въ положеніи равновѣсія, тогда точка $Ц$ была центромъ вообра...ыхъ параллельныхъ объемныхъ силъ, приложенныхъ къ элементамъ объема $AHDBFA$, ...рый состоитъ изъ объема W и изъ клина $AHFA_1$ (объемъ послѣдняго означимъ че... v); эти воображаемыя объемныя силы дѣйствовали параллельно направленію пор... $ЦN$, которая тогда была вертикальна.

Если направленіе всей совокупности параллельныхъ силъ будетъ повернуто на какой либо уголъ, то положеніе центра совокупности силъ, какъ извѣстно, не измѣнится. Пользуясь этимъ обстоятельствомъ, представимъ себѣ, что всю совокупность силъ, приложенныхъ къ только что указанному объему, повернемъ на уголъ φ, такъ чтобы силы послѣ этого дѣйствовали не параллельно нормали $ЦN$, но параллельно нормали $Ц_1N_1$; такъ какъ точка $Ц$ и послѣ того останется центромъ совокупности силъ, то можемъ заключить, что главный моментъ вокругъ оси Υ объемныхъ силъ, приложенныхъ къ объему W, плюсъ главный моментъ объемныхъ силъ, приложенныхъ къ объему v, въ суммѣ равны нулю:

$$Л(W) + Л(v) = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(43)}$$

гдѣ объемныя силы параллельны направленію $Ц_1N_1$.

Изъ равенствъ (42) и (43) можно исключить $Л(W)$; тогда получимъ:

$$Л_1 = Л(v_1) - Л(v);$$

это выраженіе можно представить иначе, если означимъ черезъ $Л'(v)$ моментъ вокругъ оси Υ объемныхъ силъ $\sigma g dO$, приложенныхъ къ элементамъ клина v, но направленныхъ параллельно $N_1Ц_1$, т. е. противоположно силамъ, приложеннымъ къ клину v_1; тогда

$$Л_1 = Л(v_1) + Л'(v).$$

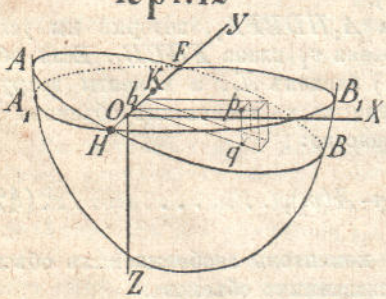
Обратимъ теперь вниманіе на то обстоятельство, что совокупность силъ, приложенныхъ къ элементамъ клина v_1, параллельныхъ направленію $Ц_1N_1$, и противоположныхъ имъ, приложенныхъ къ элементамъ клина v, приводится къ парѣ силъ, потому что объемы клиньевъ равны между собою, а слѣдовательно главный векторъ всей совокупности параллельныхъ и прямопротивоположныхъ силъ равенъ нулю.

Вслѣдствіе этого величина главнаго момента такой совокупности силъ будетъ одинакова вокругъ всякихъ параллельныхъ между собою осей, а слѣдовательно моментъ $Л_1$ будетъ равенъ суммѣ моментовъ силъ, приложенныхъ къ клиньямъ, вокругъ оси FH; означимъ эти моменты черезъ $Л_0(v_1)$ и $Л_0'(v)$;

$$Л_1 = Л_0(v_1) + Л_0'(v).$$

Имѣя въ виду ничтожную величину угла φ, а слѣдовательно и ничтожную толщину клиньевъ во всѣхъ ихъ частяхъ, мы вычислимъ эти моменты слѣдующимъ образомъ:

Черт. 12й



Примемъ направленіе HF за ось $У$-овъ, другое направленіе, къ ней перпендикулярное и заключающееся въ плоскости A_1B_1, за ось X-овъ и третье направленіе, перпендикулярное къ двумъ первымъ и направленное внизъ, за ось Z-овъ; начало координатъ гдѣ либо на прямой HF; разобьемъ каждый клинъ на призматическіе элементы объема, основанія которыхъ заключаются въ плоскости $XУ$ а высоты параллельны положительной или отрицательной оси Z-овъ. Объемъ каждаго элемента выразится такъ:

$$dO = x \operatorname{tg} \varphi \, dx \, dy,$$

потому что высота его pq (см. черт. 12) равняется $x tg\varphi$, гдѣ x равно bp. Моментъ вокругъ оси $У$-овъ объемной силы, приложенной къ элементу клина v_1 и дѣйствующей параллельно отрицательной оси Z-овъ выразится такъ:

$$\sigma g x dO = \sigma g \operatorname{tg} \varphi \, x^2 \, dx \, dy,$$

что x есть плечо момента элемента объема dO вокругъ оси $У$; также выразится моментъ вокругъ оси $У$-овъ объемной силы, приложенной къ элементу объема клина v и дѣйствующей параллельно положительной оси Z-овъ; поэтому окажется, что:

$$Л_1 = \sigma g \operatorname{tg} \varphi \iint x^2\, dx\, dy, \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \textbf{(44)}$$

гдѣ интегралъ распространенъ на всю площадь A_1B_1; этотъ интегралъ равенъ моменту инерціи площади A_1B_1 вокругъ оси HF.

Такъ какъ уголъ φ весьма малъ, то $\operatorname{tg}\varphi$ можно замѣнить произведеніемъ $\varphi'' \sin 1''$; кромѣ того, по мѣрѣ уменьшенія угла φ, площадь A_1B_1 приближается къ площади AB, такъ что вышеупомянутый интегралъ приближается въ предѣлѣ къ моменту инерціи площади плаванія AB вокругъ оси HF. Самая линія HF въ предѣлѣ проходитъ черезъ центръ тяжести площади AB, какъ видно изъ нижеслѣдующаго.

Величина объема клина v_1 равна:

$$\operatorname{tg} \varphi \iint x\, dx dy,$$

гдѣ интегралъ распространенъ только по правой части площади A_1B_1; величина же объема клина v равна интегралу, распространенному по лѣвой части площади A_1B_1:

$$-\operatorname{tg} \varphi \iint x\, dx dy,$$

гдѣ интегралъ взятъ съ отрицательнымъ знакомъ потому, что для всѣхъ точекъ этой площади x имѣетъ отрицательныя значенія; равенство объемовъ v_1 и v выразится такъ:

$$\operatorname{tg} \varphi \iint x\, dx\, dy = -\operatorname{tg} \varphi \iint x\, dx dy,$$

а отсюда, по раздѣленіи обѣихъ частей на $\operatorname{tg}\varphi$, получимъ:

$$\iint x\, dx\, dy = 0,$$

гдѣ интегралъ распространенъ на всю площадь A_1B_1 или, что въ предѣлѣ одно и то же, на всю площадь AB; это и означаетъ, что на оси HF находится центръ тяжести площади AB.

Возвратимся къ равенству (44). Замѣнимъ въ немъ моментъ $Л_1$ произведеніемъ величины силы $Ц_1P$ на плечо ея вокругъ точки $Ц$ (величина же этой силы равна вѣсу тѣла, т. е. Mg); получимъ:

$$\overline{Цi}\, Mg\, \varphi'' \sin 1'' = \sigma g\, \varphi'' \sin 1'' \iint x^2\, dx\, dy;$$

сокративъ общіе множители въ обѣихъ частяхъ этого равенства и переходя къ предѣлу, т. е. предполагая уголъ φ уменьшающимся до нуля, найдемъ слѣдующее выраженіе для $\overline{Цi}$:

$$\overline{Цi} = \frac{J_k}{V}, \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \textbf{(45)}$$

гдѣ V есть объемъ измѣщенной жидкости, а J_k моментъ инерціи площади AB вокругъ оси, проведенной въ этой плоскости черезъ центръ ея тяжести K, перпендикулярно плоскости $ЦiR$.

Формула (45) должна быть справедлива для отклоненій φ во всякихъ направленіяхъ, а слѣдовательно и для отклоненій, совершающихся въ плоскостяхъ главныхъ нормальныхъ сѣченій поверхности центровъ; въ нихъ $\overline{Цi}$ обращается въ $ЦO'$ и $ЦO''$; такъ какъ это суть наибольшая и наименьшая величины разстоянія $\overline{Цi}$, то соотвѣтственные моменты инерціи должны быть наибольшимъ и наименьшимъ моментами инерціи площади AB.

И такъ имѣемъ теперь слѣдующее правило для опредѣленія положеній плоскостей главныхъ нормальныхъ сѣченій поверхности центровъ и для опредѣленія положенія метацентровъ:

Надо найти центръ тяжести K площади плаванія AB въ положеніи равновѣсія и опредѣлить направленія главныхъ центральныхъ осей инерціи этой площади; взаимно-перпендикулярныя плоскости, проведенныя черезъ нормаль $ЦCN$ и черезъ найденныя оси инерціи, будутъ плоскостями главныхъ нормальныхъ сѣченій поверхности центровъ.

Пусть $\mathfrak{A}_k$ есть наибольшій главный центральный моментъ инерціи и $\mathfrak{B}_k$ наименьшій моментъ инерціи площади плаванія AB; разстоянія обоихъ метацентровъ отъ точки $Ц$ будутъ равны:

$$ЦO' = \frac{\mathfrak{A}_k}{V},\ ЦO' = \frac{\mathfrak{B}_k}{V}; \qquad (46)$$

причемъ верхній метацентръ O' соотвѣтствуетъ отклоненію въ плоскости перпендикулярной къ той главной оси инерціи, вокругъ которой моментъ инерціи — наибольшій.

Для того, чтобы положеніе равновѣсія было вполнѣ устойчивымъ, необходимо, чтобы было

$$\mathfrak{B}_k - Vl > 0,$$

тогда уже и подавно $\mathfrak{A}_k$ будетъ болѣе Vl; здѣсь l означаетъ разстояніе $ЦC$.

Величины моментовъ силъ, стремящихся возстановить тѣло, отклоненное отъ своего положенія равновѣсія на уголъ φ'' (въ секундахъ), равны:

$$\sigma g\,(\mathfrak{A}_k - Vl)\,\varphi'' \sin 1'',\ \ \sigma g\,(\mathfrak{B}_k - Vl)\,\varphi'' \sin 1'',$$

для отклоненій въ каждой изъ главныхъ плоскостей.

Для примѣра возьмемъ слѣдующій случай.

Твердое тѣло есть однородная прямоугольная призма длины $2a$ съ квадратнымъ основаніемъ (сторона квадрата $2b$); тѣло плаваетъ въ жидкости, удѣльный вѣсъ которой вдвое болѣе удѣльнаго вѣса тѣла. Найти устойчивыя положенія равновѣсія изъ числа тѣхъ, при которыхъ длина призмы горизонтальна.

Очевидно, что призма имѣетъ четыре такихъ положенія равновѣсія, при которыхъ по двѣ боковыя грани горизонтальны и четыре такихъ, при которыхъ онѣ наклонны къ горизонту подъ угломъ въ 45°.

При каждомъ изъ первыхъ положеній измѣщенный объемъ есть прямоугольная призма, объемъ которой равенъ половинѣ объема тѣла, т. е. $4ab^2$, разстояніе l равно b дѣленному на два; площадь плаванія есть прямоугольникъ длины $2a$ и ширины $2b$; главные моменты инерціи этой площади: $\mathfrak{A}_k = \frac{4ba^3}{3}$, $\mathfrak{B}_k = \frac{4ab^3}{3}$;

$$\mathfrak{B}_k - Vl = -\frac{2}{3}ab^3,\ \ \mathfrak{A}_k - Vl = \frac{2ba}{3}(2a^2 - 3b^2);$$

значитъ эти положенія навѣрно неустойчивы для вращеній вокругъ оси параллельной длинѣ призмы.

При другихъ четырехъ положеніяхъ равновѣсія, когда одно ребро занимаетъ самое низшее, другое—самое высшее мѣсто, объемъ V имѣетъ ту же самую величину, но имѣетъ видъ трегранной призмы; $l = b\frac{\sqrt{2}}{3}$; площадь плаванія есть прямоугольникъ длины $2a$ и ширины $2b\sqrt{2}$;

$$\mathfrak{A}_k = \frac{4ba^3\sqrt{2}}{3},\ \mathfrak{B}_k = \frac{8ab^3\sqrt{2}}{3};$$

$$\mathfrak{B}_k - lV = \frac{4}{3}ab^3\sqrt{2},\ \mathfrak{A}_k - lV = \frac{4}{3}ab\sqrt{2}\,(a^2 - b^2);$$

Должны быть эти положенія устойчивы.

III.

Уравненія гидродинамики.

§ 17. Аналитическое выраженіе движенія сплошнаго деформирующагося тѣла. Скорости и ускоренія точекъ его.

Движеніе такого тѣла будетъ намъ извѣстно, если имѣемъ возможность перейдти отъ *начальныхъ координатъ* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ всякой точки тѣла къ координатамъ ея x, y, z въ любой моментъ времени; для этого необходимо, чтобы x, y, z были выражены функціями начальныхъ координатъ $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ и времени t:

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, t) \\ y &= f_2(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, t) \\ z &= f_3(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, t) \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(47)}$$

гдѣ предполагается, что время считается отъ начальнаго момента.

Если тѣло не претерпѣваетъ никакого разрыва при движеніи, то функціи f_1, f_2, f_3 должны быть сплошными функціями какъ относительно t, такъ и относительно $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$.

Для поясненія на примѣрѣ, возьмемъ слѣдующій случай.

Въ начальный моментъ сплошное тѣло имѣло видъ прямоугольнаго параллелопипеда, центръ котораго совпадаетъ съ началомъ координатъ, а ребра, имѣющія длины $2a$, $2b$, $2c$, параллельны осямъ координатъ X, Y, Z. Точки этого тѣла, имѣвшія при $t = 0$ координаты $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$, въ моментъ t имѣютъ координаты:

$$x = \mathfrak{a},\ y = \mathfrak{b} + B\left(1 - \frac{\mathfrak{a}^2}{a^2}\right)t,\ z = \mathfrak{c} \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(47, \mathit{A})}$$

Какое движеніе совершаютъ точки тѣла, предполагая, что формулы (47, A) справедливы для всѣхъ точекъ тѣла и для всякаго момента t?

Такъ какъ координаты $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{c}$ остаются неизмѣнными, а измѣняются только y, то всѣ точки тѣла движутся по прямымъ линіямъ, параллельнымъ оси Y-овъ, каждая

движется равномѣрно, потому что y возрастаетъ пропорціонально времени; наибольшею скоростью B обладаютъ точки тѣла, находящейся въ плоскости YZ (для нихъ $\mathfrak{a}=0$), точки же, находившіяся на граняхъ $\mathfrak{a}=+a$ и $\mathfrak{a}=-a$ параллелопипеда, остаются неподвижными, потому что для нихъ $y=\mathfrak{b}$.

Всѣ точки тѣла, находившіяся въ моментъ $t=0$ на грани $\mathfrak{b}=-b$, въ моментъ t_1 будутъ на поверхности, выражаемой уравненіемъ:

$$y=Bt_1-b-\frac{Bt_1}{a^2}x^2;$$

всѣ точки, находившіяся въ моментъ $t=0$ на плоскости $\mathfrak{b}=$ постоянн., параллельной къ вышесказанной грани, будутъ въ моментъ t_1 находиться на поверхности:

$$y=Bt_1+\mathfrak{b}-\frac{Bt_1}{a^2}x^2;$$

всѣ эти поверхности суть параболическіе цилиндры, производящія которыхъ параллельны оси Z-овъ.

Проэкціи на оси координатъ скоростей точекъ сплошнаго тѣла, не претерпѣвающаго разрыва при движеніи, могутъ быть выражены, или сплошными функціями времени t и начальныхъ координатъ $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ или сплошными функціями времени t и координатъ x, y, z.

Чтобы получить проэкціи скорости $\mathfrak{v}$ которой либо точки тѣла для какого либо моментъ времени, надо подставить въ функціи (47) начальныя координаты этой точки вмѣсто $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, взять производныя отъ нихъ по времени и подставить вмѣсто t значеніе, соотвѣтствующее разсматриваемому моменту; подобно этому придется поступить для полученія проэкцій скорости всякой точки тѣла въ какой угодно моментъ времени. Вообще же можно сказать, что проэкціи скоростей точекъ тѣла на оси координатъ выразятся функціями отъ $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, t, равными *частнымъ производнымъ по* t отъ функцій f_1, f_2, f_3, выражающихъ x, y, z; т. е.:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{v}\cos(\mathfrak{v},X)&=\frac{dx}{dt}=\frac{\partial f_1(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},t)}{\partial t}\\ \mathfrak{v}\cos(\mathfrak{v},Y)&=\frac{dy}{dt}=\frac{\partial f_2(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},t)}{\partial t}\\ \mathfrak{v}\cos(\mathfrak{v},Z)&=\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f_3(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},t)}{\partial t}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(48)$$

Если изъ этихъ выраженій исключить $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ при помощи равенствъ (47), то проэкціи скоростей точекъ деформируемаго тѣла выразятся нѣкоторыми функціями φ_1, φ_2, φ_3 отъ t и отъ координатъ x, y, z; проэкціи скорости, выраженныя такимъ образомъ, мы будемъ обозначать знаками u, v, w, такъ что:

$$\left.\begin{aligned}u&=\mathfrak{v}\cos(\mathfrak{v},X)=\varphi_1(x,y,z,t)\\ v&=\mathfrak{v}\cos(\mathfrak{v},Y)=\varphi_2(x,y,z,t)\\ w&=\mathfrak{v}\cos(\mathfrak{v},Z)=\varphi_3(x,y,z,t)\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(49)$$

Обратно, чтобы изъ выраженій u, v, w получить выраженія $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$, должно въ функціяхъ φ_1, φ_2, φ_3 замѣнить x, y, z функціями f_1, f_2, f_3 (47), вслѣдствіе чего φ_1, φ_2, φ_3 обратятся въ частныя производныя отъ f_1, f_2, f_3 по t, такъ что напримѣръ:

$$\varphi_1 (f_1 (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, t),\ f_2 (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, t),\ f_3 (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, t), t) = \frac{\partial f_1 (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, t)}{\partial t} \quad \ldots\ldots (50)$$

Для поясненія возьмемъ такой случай движенія сплошнаго деформирующагося тѣла:

$$x = \mathfrak{a} e^{at},\ y = \mathfrak{b} e^{bt},\ z = \mathfrak{c} e^{ct}.$$

Здѣсь:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \mathfrak{a} a e^{at},\ \frac{\partial y}{\partial t} = \mathfrak{b} b e^{bt},\ \frac{\partial z}{\partial t} = \mathfrak{c} c e^{ct}.$$

$$u = ax,\ v = by,\ w = cz.$$

Проэкціи на оси координатъ ускореній $\dot{\mathfrak{v}}$ точекъ деформирующагося тѣла тоже могутъ быть выражены или функціями отъ $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ и t, или же функціями отъ x, y, z, t.

Первыя выраженія получатся, взявъ частныя производныя втораго порядка по t отъ x, y, z, т. е. отъ функцій (47); именно:

$$\left.\begin{aligned}
\dot{\mathfrak{v}} \cos (\dot{\mathfrak{v}}, X) &= \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f_1 (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, t)}{\partial t^2}, \\
\dot{\mathfrak{v}} \cos (\dot{\mathfrak{v}}, Y) &= \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f_2 (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, t)}{\partial t^2}, \\
\dot{\mathfrak{v}} \cos (\dot{\mathfrak{v}}, Z) &= \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f_3 (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, t)}{\partial t^2}.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (51)$$

Чтобы получить выраженія тѣхъ же проэкцій въ фрнкціяхъ отъ x, y, z, t, будемъ разсуждать слѣдующимъ образомъ.

Вторая производная отъ f_1 по t равняется первой производной по t отъ $\frac{\partial x}{\partial t}$, т. е.:

$$\dot{\mathfrak{v}} \cos (\dot{\mathfrak{v}}, X) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f_1 (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, t)}{\partial t} \right),$$

или же, на основаніи равенства (50):

$$\dot{\mathfrak{v}} \cos (\dot{\mathfrak{v}}, X) = \frac{\partial}{\partial t} \Big[\varphi_1 (f_1 (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, t), f_2 (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, t), f_3 (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, t), t) \Big],$$

то есть, взявъ дѣйствительно производную по t:

$$\dot{\mathfrak{v}} \cos (\dot{\mathfrak{v}}, X) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial f_3} \frac{\partial f_3}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t},$$

или, такъ какъ f_1, f_2, f_3 суть x, y, z, то это выраженіе можно написать такъ:

$$\dot{\mathfrak{v}} \cos (\dot{\mathfrak{v}}, X) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}.$$

Если здѣсь замѣнить производныя отъ x, y, z по t—выраженіями u, v, w, а въ φ_1 и ея производныхъ не замѣнять x, y, z функціями f_1, f_2, f_3, то вторая часть этого выраженія и будетъ функціею отъ x, y, z, t.

Мы представимъ эти выраженія въ такомъ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{v}\cos(\mathfrak{v}, X) &= \frac{du}{dt} + \frac{du}{dx}u + \frac{du}{dy}v + \frac{du}{dz}w \\ \mathfrak{v}\cos(\mathfrak{v}, Y) &= \frac{dv}{dt} + \frac{dv}{dx}u + \frac{dv}{dy}v + \frac{dv}{dz}w \\ \mathfrak{v}\cos(\mathfrak{v}, Z) &= \frac{dw}{dt} + \frac{dw}{dx}u + \frac{dw}{dy}v + \frac{dw}{dz}w \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (52)$$

или, сокращенно, будемъ эти же самыя выраженія писать подъ видомъ *полныхъ производныхъ отъ u, v, w по t*:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{v}\cos(\mathfrak{v}, X) &= \frac{du}{dt}, \\ \mathfrak{v}\cos(\mathfrak{v}, Y) &= \frac{dv}{dt}, \\ \mathfrak{v}\cos(\mathfrak{v}, Z) &= \frac{dw}{dt}. \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots (52, bis)$$

§ 18. Дифференціальное уравненіе неразрывности деформирующагося вещества.

Въ предыдущемъ параграфѣ было показано, что проэкціи скоростей точекъ деформирующагося тѣла можно выразить функціями отъ времени t и отъ координатъ x, y, z; если дадимъ x, y, z какія либо постоянныя значенія, свойственныя нѣкоторой точкѣ пространства занимаемаго тѣломъ, то законъ измѣненія величинъ u, v, w съ теченіемъ t дастъ представленіе объ измѣненіи величины и направленія скорости съ теченіемъ времени въ этой точкѣ пространства; съ другой же стороны, зависимость величинъ u, v, w отъ x, y, z даетъ понятіе о распредѣленіи одновременныхъ скоростей точекъ тѣла въ занимаемомъ имъ пространствѣ.

Плотности точекъ неоднороднаго деформирующагося тѣла могутъ быть выражены, подобно проэкціямъ скорости, двоякимъ образомъ: или функціею отъ начальныхъ координатъ и времени, или же функціею отъ координатъ x, y, z и времени. Въ настоящемъ параграфѣ будемъ имѣть въ виду послѣдній способъ выраженія.

Выдѣлимъ мысленно въ той части пространства, которая занята деформирующимся тѣломъ, какой либо объемъ, ограниченный замкнутою поверхностью; объемъ этотъ долженъ быть выбранъ такъ, чтобы и въ моментъ t и въ моментъ $t + dt$ онъ былъ весь заполненъ веществомъ тѣла.

Разобьемъ этотъ объемъ на безконечно-малые элементы dO.

Масса вещества, заключающагося въ моментъ t въ этомъ объемѣ, выразится интеграломъ:

$$\iiint \sigma dO,$$

распространеннымъ на весь этотъ объемъ; σ предполагается функціею отъ x, y, z, t:

$$\sigma = f\,(x, y, z, t)$$

а элементъ объема dO выразится чрезъ $dx\,dy\,dz$.

Въ теченіи безконечно-малаго промежутка времени dt плотность въ каждой точкѣ объема получитъ приращеніе $\frac{\partial \sigma}{\partial t}\,dt$ и, слѣдовательно, масса вещества, заключающагося въ томъ же объемѣ въ моментъ $(t + dt)$ будетъ равна:

$$\iiint\left(\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial t}\,dt\right)dO;$$

стало быть, за время отъ t до $t + dt$ въ разсматриваемомъ нами объемѣ *прибудетъ* слѣдующая масса вещества:

$$\iiint \frac{\partial \sigma}{\partial t}\,dO\,dt \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(53)}$$

Эта прибыль массы могла произойдти только оттого, что въ теченіи того же времени въ разсматриваемый объемъ вошло больше вещества извнѣ его, чѣмъ изъ него вышло.

Выходъ и входъ вещества происходитъ не иначе, какъ черезъ элементы поверхности объема.

Пусть dS_1 есть одинъ изъ тѣхъ элементовъ поверхности, въ которыхъ нормаль N, возстановленная внаружу объема, составляетъ со скоростью $\mathfrak{v}_s$ въ этомъ элементѣ уголъ острый; количество вещества, прошедшее черезъ этотъ элементъ въ теченіи безконечно-малаго промежутка времени dt, можно выразить произведеніемъ изъ плотности σ_s въ этомъ элементѣ на объемъ косаго цилиндра, имѣющаго основаніемъ этотъ элементъ dS_1, а производящими — безконечно-малыя длины $\mathfrak{v}_s\,dt$, наклоненныя къ нормали N подъ угломъ $(\mathfrak{v}_s N)$; объемъ этого цилиндра равенъ:

$$dS_1\,\mathfrak{v}_s \cos(\mathfrak{v}_s N)\,dt$$

и потому черезъ элементъ dS_1 *выходитъ* изъ разсматриваемаго нами объема слѣдующая масса вещества:

$$\sigma_s\,\mathfrak{v}_s \cos(\mathfrak{v}_s N)\,dS_1\,dt \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

Пусть dS_2 есть одинъ изъ тѣхъ элементовъ, гдѣ уголъ $(\mathfrak{v}_s N)$ — тупой; черезъ такой элементъ *входитъ* въ разсматриваемый объемъ слѣдующая масса вещества:

$$-\,\sigma_s\,\mathfrak{v}_s \cos(\mathfrak{v}_s N)\,dS_2\,dt; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (B)$$

здѣсь поставленъ знакъ минусъ потому, что косинусъ тупаго угла есть величина отрицательная, а намъ нужно было составить выраженіе положительнаго количества, а именно массы входящаго вещества.

Взявъ интегралъ отъ выраженій (B) по всѣмъ элементамъ, такимъ какъ dS_2, получимъ массу вещества входящаго въ объемъ, а взявъ интегралъ отъ выраженій (A)

по всѣмъ элементамъ, такимъ какъ dS_1, получимъ массу вещества выходящаго изъ объема; вычтя второй интегралъ изъ перваго, получимъ интегралъ:

$$-\iint \sigma_s\, \mathfrak{v}_s \cos(\mathfrak{v}_s N)\, dS\, dt, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(54)}$$

распространенный по всей поверхности объема и представляющій другое выраженіе прибыли массы за время dt. Приравняемъ другъ другу оба полученныя выраженія:

$$dt \iiint \frac{\partial\sigma}{\partial t} dO = -\,dt \iint \sigma_s\, \mathfrak{v}_s \cos(\mathfrak{v}_s N)\, dS \ldots\ldots\ldots \textbf{(55)}$$

Замѣнимъ здѣсь проэкцію скорости на нормаль слѣдующимъ трехчленомъ:

$$\mathfrak{v}_s \cos(\mathfrak{v}_s N) = u_s \cos(N, X) + v_s \cos(N, Y) + w_s \cos(N, Z) \ldots \textbf{(56)}$$

и получившіеся черезъ это во второй части интегралы:

$$\iint \sigma_s\, u_s \cos(N, X)\, dS, \quad \iint \sigma_s\, v_s \cos(N, Y)\, dS, \quad \iint \sigma_s\, w_s \cos(N, Z)\, dS$$

преобразуемъ по формуламъ 16-мъ § 10-го предыдущей главы въ интегралы, распространенные по объему; тогда получимъ, раздѣливъ обѣ части на dt и перенеся всѣ члены въ первую часть:

$$\iiint \left(\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \frac{\partial(\sigma u)}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma v)}{\partial y} + \frac{\partial(\sigma w)}{\partial z}\right) dO = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(57)}$$

Мы составляли это равенство, предполагая промежутокъ времени dt безконечно-малымъ и весь объемъ занятымъ веществомъ въ теченіи всего промежутка. Если то деформирующееся тѣло, движеніе котораго мы разсматриваемъ, *не претерпѣваетъ разрыва сплошности ни въ которой изъ своихъ частей*, то мы можемъ примѣнить равенство (56) къ которой угодно части такого тѣла, какъ бы мала эта часть ни была, а изъ этого тогда будетъ слѣдовать, что *во всякой точкѣ тѣла, деформирующагося неразрывнымъ образомъ, должно имѣть мѣсто слѣдующее дифференціальное уравненіе:*

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \frac{\partial\sigma}{\partial x} u + \frac{\partial\sigma}{\partial y} v + \frac{\partial\sigma}{\partial z} w + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\sigma + 0, \ldots\ldots\ldots \textbf{(58)}$$

называемое *уравненіемъ неразрывности массы.*

Введя выраженіе полной производной отъ плотности по времени, можно уравненіе (58) представить такъ:

$$\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{dt} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(59)}$$

Если деформирующееся тѣло однородно и плотность его неизмѣнна, то уравненіе непрерывности обращается въ уравненіе, выражающее неизмѣняемость плотности вещества, а именно въ слѣдующее:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (60)$$

§ 19. Общія дифференціальныя уравненія движенія жидкостей, необладающихъ треніемъ.

Послѣ всего сказаннаго въ двухъ предыдущихъ параграфахъ, примѣнимъ дифференціальныя уравненія (17) параграфа 11-го къ *жидкости*, такъ называемой, *совершенной или идеальной*, которая и при движеніи не оказываетъ и не выдерживаетъ никакихъ тангенціальныхъ напряженій, ни натяженій; въ § 12-мъ было упомянуто, что такому идеалу неудовлетворяетъ ни одна дѣйствительная жидкость, такъ какъ въ нихъ при движеніи развивается треніе внутреннее, т. е. между частицами самой жидкости, и внѣшнее, т. е. между жидкостью и тѣми твердыми тѣлами, по поверхности которыхъ она течетъ.

Дифференціальныя уравненія движенія жидкости представляютъ въ двоякомъ видѣ, смотря по тому, предполагаются ли скорости точекъ жидкости выраженными въ функціяхъ отъ t, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, или же въ функціяхъ отъ t, x, y, z. Мы теперь выберемъ послѣднее предположеніе и, сообразуясь съ нимъ, выразимъ проэкціи ускореній точекъ жидкости на оси координатъ по формуламъ (52) параграфа 17-го.

Уравненія (17) тогда получатъ слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{aligned} \sigma\left(\frac{dy}{dt} + \frac{du}{dx}u + \frac{du}{dy}v + \frac{du}{dz}w\right) &= \mathfrak{X}\sigma - \frac{dp}{dx} \\ \sigma\left(\frac{dv}{dt} + \frac{dv}{dx}u + \frac{dv}{dy}v + \frac{dv}{dz}w\right) &= \mathfrak{Y}\sigma - \frac{dp}{dy} \\ \sigma\left(\frac{dw}{dt} + \frac{dw}{dx}u + \frac{dw}{dy}v + \frac{dw}{dz}w\right) &= \mathfrak{Z}\sigma - \frac{dp}{zt} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (61)$$

гдѣ p имѣетъ то же самое значеніе, что и въ § 12-мъ.

Если жидкость несжимаема и плотность ея однородна и неизмѣнна, то въ трехъ дифференціальныхъ уравненіяхъ (61) будетъ заключаться четыре функціи: u, v, w, p отъ четырехъ перемѣнныхъ: t, x, y, z; присоединивъ къ этимъ уравненіямъ уравненіе несжимаемости:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (60)$$

будемъ имѣть четыре дифференціальныя совокупныя уравненія съ частными производными перваго порядка. Для рѣшенія какого либо вопроса о движеніи несжимаемой жидкости подъ вліяніемъ данныхъ объемныхъ силъ надлежало бы прежде всего найти общій интегралъ четырехъ вышесказанныхъ дифференціальныхъ уравненій съ частными производными, то есть пришлось бы отыскать такія самыя общія выраженія для u, v, w, p, которыя удовлетворяли бы сказаннымъ дифференціальнымъ уравненіямъ при всякихъ значеніяхъ t, x, y, z во время всего движенія и въ томъ пространствѣ, которое занято движущеюся жидкостью.

Этимъ, однако, процессъ рѣшенія даннаго вопроса еще не закончится, такъ какъ въ найденныхъ общихъ выраженіяхъ для p, u, v, w войдутъ произвольныя функціи, видъ которыхъ опредѣлится тѣмъ требованіемъ, чтобы найденныя выраженія для p, u, v, w удовлетворяли нѣкоторымъ условіямъ на границахъ жидкости и кромѣ того начальнымъ обстоятельствамъ движенія; мы составимъ теперь выраженія этихъ условій на границахъ.

Движущаяся жидкость можетъ быть ограничена со всѣхъ сторонъ, или же можетъ простираться въ безконечность по нѣкоторымъ направленіямъ, или наконецъ можетъ быть со всѣхъ сторонъ неограничена, простираясь въ безконечность по всѣмъ направленіямъ.

Тамъ, гдѣ жидкость ограничена и гдѣ она отдѣляется отъ прочаго пространства, задается, либо видъ самой поверхности жидкости, либо величина внѣшняго давленія на поверхности.

Тѣ части поверхности жидкости, видъ которыхъ задается заранѣе, для всякаго момента движенія, называются *стѣнками*; онѣ образуются поверхностями тѣлъ, имѣющихъ данное движеніе или занимающихъ данное положеніе. На поверхностяхъ стѣнокъ давленіе заранѣе не задается, но величина его во всякой точкѣ поверхности стѣнки и для всякаго момента движенія становится извѣстною по полученіи полнаго рѣшенія даннаго вопроса о движеніи жидкости.

Тѣ части поверхности жидкости, на которыхъ задается величина внѣшняго давленія, называются *свободною поверхностью жидкости*; видъ свободныхъ частей поверхности жидкости становится извѣстнымъ послѣ полученія полнаго рѣшенія вопроса.

Жидкость не должна отдѣляться отъ стѣнки, то есть у поверхности стѣнки не должно образоваться пустотъ, незанятыхъ жидкостью; для этого необходимо, чтобы точки жидкости, бывшія на поверхности стѣнки въ моментъ t, не сходили съ этой поверхности и въ теченіи послѣдующаго затѣмъ промежутка времени отъ t до $t+dt$, или по крайней мѣрѣ сходили съ нея не иначе, какъ по касательной; это условіе требуетъ, чтобы скорости u_s, v_s, w_s точекъ жидкости, находящихся въ моментъ t на поверхности стѣнки:

$$f(x, y, z, t) = 0 \qquad (62)$$

удовлетворяли равенству:

$$\frac{\partial f}{\partial x}u_s + \frac{\partial f}{\partial y}v_s + \frac{\partial f}{\partial z}w_s + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \qquad (63)$$

Если стѣнка неподвижна, то уравненіе ея не заключаетъ времени явнымъ образомъ:

$$f(x, y, z) = 0 \qquad (62, a)$$

и скорости точекъ жидкости, находящихся по такой стѣнкѣ, должны удовлетворять равенству:

$$\frac{\partial f}{\partial x}u_s + \frac{\partial f}{\partial y}v_s + \frac{df}{dz}w_s = 0, \qquad (63, a)$$

которое можно написать и въ такомъ видѣ:

$$\mathfrak{v}_s \cos(N, \mathfrak{v}_s) = 0 \qquad (63, a)$$

Таковы условія, которымъ должны удовлетворять скорости точекъ жидкости на стѣнкахъ.

На свободной поверхности скорости точекъ жидкости должны удовлетворять равенствамъ подобнаго же рода, какъ сейчасъ увидимъ; разница здѣсь будетъ только въ томъ, что уравненіе свободной поверхности не задано, между тѣмъ какъ уравненіе стѣнки дано.

Пусть:

$$F(x, y, z, t) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(64)}$$

есть (неизвѣстное намъ до окончательнаго рѣшенія вопроса) уравненіе свободной поверхности, на всѣ точки которой дѣйствуетъ внѣшнее давленіе данной величины.

Такъ какъ предполагается, что движущаяся жидкость нигдѣ не получаетъ разрыва, то всѣ тѣ точки жидкости, которыя были на свободной поверхности въ моментъ t, могутъ сойти съ нея только непрерывнымъ образомъ, по касательной къ поверхности, а поэтому скорости u_s, v_s, w_s точекъ поверхности должны удовлетворять слѣдующему равенству:

$$\frac{\partial F}{\partial x} u_s + \frac{\partial F}{\partial y} v_s + \frac{\partial F}{\partial z} w_s + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(65)}$$

Тамъ, гдѣ жидкость простирается въ безконечность, должны быть даны скорости безконечно-удаленныхъ точекъ.

Когда жидкость упруга, тогда дифференціальныя уравненія (61) заключаютъ не четыре, но пять функцій: u, v, w, p, σ отъ четырехъ перемѣнныхъ: t, x, y, z. Для опредѣленія этихъ функцій придется присоединить къ уравненіямъ (61) уравненіе непрерывности (58) и зависимость (23) § 12-го между плотностью σ и давленіемъ p. Условія, которымъ должны удовлетворять скорости точекъ на поверхности жидкости, таковы же, какъ и для жидкости несжимаемой.

До настоящаго времени не удалось еще рѣшить или проинтегрировать дифференціальныя уравненія (60) и (61) или (61), (58), (23) въ самомъ общемъ ихъ видѣ; рѣшеніе получено до сихъ поръ только для ограниченнаго числа частныхъ случаевъ и притомъ самыхъ простѣйшихъ.

Приведенная здѣсь форма дифференціальныхъ уравненій (61) гидродинамики дана Эйлеромъ; есть еще другая форма такихъ уравненій, данная Лагранжемъ, приноровленная къ опредѣленію x, y, z, σ и p въ функціяхъ отъ t и отъ начальныхъ координатъ a, b, c.

§ 20. Движенія несжимаемой жидкости, при которыхъ скорости имѣютъ потенціалъ.

Въ настоящемъ параграфѣ мы будемъ предполагать, что жидкость несжимаема и что внѣшнія объемныя силы имѣютъ потенціалъ, т. е., что:

$$\mathfrak{X} = \frac{\partial U}{\partial x}, \ \mathfrak{Y} = \frac{\partial U}{\partial y}, \ \mathfrak{Z} = \frac{\partial U}{\partial z},$$

гдѣ U есть функція отъ x, y, z.

Въ настоящемъ параграфѣ мы нѣсколько остановимся на такихъ случаяхъ движенія несжимаемой жидкости, при которыхъ скорости u, v, w для всей движущейся

жидкости суть частныя производныя по x, y, z отъ нѣкоторой функціи φ отъ этихъ перемѣнныхъ, которая можетъ заключать, кромѣ нихъ, еще и время t.

И такъ, пусть во всей жидкости и во все время движенія:

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x},\ v = \frac{\partial\varphi}{\partial y},\ w = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (65)$$

причемъ функція φ отъ x, y, z и t не измѣняетъ своего вида во все время движенія.

Такая функція φ называется *потенціаломъ скоростей* или *потенціальною функціею скоростей*.

Такъ какъ при движеніи несжимаемой жидкости должно быть удовлетворено уравненіе несжимаемости (60), то не всякая функція отъ x, y, z и t можетъ быть потенціальною функціею скоростей, но только такая, которая удовлетворяетъ дифференціальному уравненію съ частными производными 2-го порядка:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (66)$$

въ которое обращается уравненіе (60) при подстановленіи въ него вмѣсто u, v, w — частныхъ производныхъ (65).

Кромѣ того эта функція на стѣнкахъ должна удовлетворять уравненіямъ вида:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_s + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_s + \frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_s = 0 \dots\dots\dots\dots (67)$$

и наконецъ, она должна удовлетворять начальнымъ обстоятельствамъ движенія.

Дифференціальныя уравненія (61), по подстановленіи въ нихъ вмѣсто u, v, w частныхъ производныхъ (65), получатъ нижеслѣдующій видъ; первое:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial x} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial x},$$

или, что то же самое:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right) - U + \frac{p}{\sigma}\right] = 0,$$

или же:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0, \dots\dots\dots\dots\dots\dots (68, a)$$

гдѣ

$$\psi = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right) - U + \frac{p}{\sigma} = 0;$$

второе же и третье получатъ видъ:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0 \dots\dots (68, b),\quad \frac{\partial\psi}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (68, c)$$

Эти уравненія (68) выражаютъ, что ψ не зависитъ ни отъ x, ни отъ y, ни отъ z и, стало быть, можетъ быть функціею только одного t; слѣдовательно:

$$\frac{p}{\sigma} = U + \psi(t) - \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right),$$

или:

$$p = \sigma\left(U - \frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{\mathfrak{v}^2}{2}\right), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(69)}$$

гдѣ

$$\mathfrak{v}^2 = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(70)}$$

$$\Phi = \varphi - \psi(t) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(71)}$$

Функцію Φ можно разсматривать тоже какъ потенціальную функцію тѣхъ же скоростей, такъ какъ выраженія (65) и дифференціальныя уравненія (66) и (67) нисколько не измѣняются отъ присоединенія къ φ какой угодно функціи отъ t.

Если P есть величина давленія на свободной поверхности, то уравненіе этой поверхности будетъ:

$$P = \sigma\left[U - \frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right)\right].$$

Равенство (69) выражаетъ довольно простую зависимость между давленіемъ, потенціаломъ объемныхъ силъ и квадратомъ скорости въ точкахъ несжимаемой жидкости, движущейся такимъ образомъ, что скорости имѣютъ потенціалъ; въ тѣхъ точкахъ жидкости, гдѣ $\left(U - \frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)$ имѣетъ одинаковыя величины, сумма $\left(p + \frac{\sigma}{2}\mathfrak{v}^2\right)$ будетъ тоже имѣть одинаковыя величины и въ той изъ этихъ точекъ, въ которой скорость болѣе чѣмъ въ прочихъ, давленіе будетъ менѣе.

По отношенію къ распредѣленію одновременныхъ скоростей точекъ движущейся жидкости потенціальная функція скоростей имѣетъ ту же самую роль, какую имѣетъ потенціальная функція какой либо силы по отношенію къ распредѣленію величинъ и направленій силы въ пространствѣ. Одновременныя скорости всѣхъ точекъ жидкости направлены по нормалямъ къ поверхностямъ уровня потенціальной функціи Φ и равны значеніямъ дифференціальнаго параметра

$$\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2}$$

этой функціи въ соотвѣтственной точкѣ.

Если t не входитъ вовсе въ функцію φ, то поверхности уровня не измѣняютъ ни своего вида, ни положенія въ пространствѣ, а потому тогда направленія и величины скоростей въ каждой точкѣ пространства не измѣняются.

§ 21. Установившееся движеніе. Теорема Д. Бернулли.

Если во всѣхъ точкахъ пространства, занятаго какою либо жидкостью, величины и направленія скоростей, а также величины давленій и плотностей остаются неизмѣнными во все время движенія, т. е. если слѣдующія частныя производныя:

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial p}{\partial t}, \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

повсюду равны нулю, то движеніе жидкости называется *установившимся*; при такомъ движеніи u, v, w, p, σ суть функціи отъ x, y, z, не заключающія явнымъ образомъ времени t.

Очевидно, что при такомъ движеніи всѣ тѣ точки жидкости, которыя послѣдовательно проходятъ черезъ одну и ту же точку пространства, движутся другъ за другомъ по одной и той же траэкторіи; каждую такую траэкторію мы будемъ называть *линіею тока*.

Обратимъ вниманіе на которую угодно изъ линій тока, означимъ черезъ s длину дуги, считаемой отъ какой либо точки этой кривой, вдоль по ней, въ сторону движенія по ней точекъ жидкости и предположимъ, что координаты точекъ этой траэкторіи выражены функціями длины s; тогда u, v, w въ различныхъ точкахъ траэкторіи могутъ быть выражены такъ:

$$u = \mathfrak{v}\frac{dx}{ds},\ v = \mathfrak{v}\frac{dy}{ds},\ w = \mathfrak{v}\frac{dz}{ds} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (72)$$

Примѣнимъ дифференціальныя уравненія (61) къ точкамъ жидкости, описывающимъ избранную нами линію тока; для этого, замѣнивъ въ нихъ u, v, w выраженіями (72), найдемъ, что первое изъ этихъ уравненій получитъ слѣдующій видъ:

$$\mathfrak{v}\left(\frac{\partial\left(\mathfrak{v}\frac{dx}{ds}\right)}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\left(\mathfrak{v}\frac{dx}{ds}\right)}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\left(\mathfrak{v}\frac{dx}{ds}\right)}{\partial z}\frac{dz}{ds}\right) = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial x},$$

или, такъ какъ u, v, w суть функціи отъ x, y, z, а послѣднія, для одной и той же линіи тока, суть функціи отъ s, то это уравненіе можно представить такъ:

$$\mathfrak{v}\frac{d\left(\mathfrak{v}\frac{dx}{ds}\right)}{ds} = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial x};$$

по тѣмъ же самымъ причинамъ остальныя два дифференціальныя уравненія, примѣненныя къ той же точкѣ, можно представить такъ:

$$\mathfrak{v}\frac{d\left(\mathfrak{v}\frac{dy}{ds}\right)}{ds} = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial y};$$

$$\mathfrak{v}\frac{d\left(\mathfrak{v}\frac{dz}{ds}\right)}{ds} = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Помноживъ эти уравненія соотвѣтственно на $\frac{dx}{ds}ds$, $\frac{dy}{ds}ds$ и $\frac{dz}{ds}ds$ и сложивъ, получимъ слѣдующее дифференціальное равенство:

$$d\left(\frac{\mathfrak{v}^2}{2}\right) = dU - \frac{dp}{\sigma} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (73)$$

Интегрируя это уравненіе, мы найдемъ, что на разсматриваемой линіи тока выраженіе

$$\frac{v^2}{2} - U + \Pi$$

имѣетъ постоянную величину, гдѣ

$$\Pi = \int \frac{dp}{\sigma} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(74)}$$

То, что получено для одной изъ линій тока, въ равной степени относится и ко всякой линіи тока установившагося движенія, съ тою лишь разницею, что величины постоянныхъ могутъ быть различны на разныхъ линіяхъ тока; если жидкость есть газъ, слѣдующій закону Маріотта, то

$$\Pi = \frac{1}{\mu} \log p;$$

если же жидкость несжимаемая однородной плотности, то

$$\Pi = \frac{p}{\sigma}$$

Слѣдовательно, *при установившемся движеніи несжимаемой жидкости, на каждой линіи тока существуетъ зависимость между давленіемъ, потенціаломъ силъ и скоростью, выражаемая равенствомъ*:

$$p = \sigma\left(C + U - \frac{v^2}{2}\right), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(75)}$$

гдѣ постоянная C можетъ имѣть различныя значенія для разныхъ линій тока; но если всѣ линіи тока суть незамкнутыя кривыя, простирающіяся въ безконечность, и если на безконечности скорости и давленія, а также и значенія потенціала U равны одной и той же конечной величинѣ по всѣмъ направленіямъ, то C должно быть одно и то же на всѣхъ линіяхъ тока.

Въ частности, для установившагося движенія несжимаемой жидкости подъ вліяніемъ силы тяжести, когда потенціальная функція объемныхъ силъ такова:

$$U = gz,$$

(если ось Z направимъ *вертикально внизъ*), получимъ слѣдующую зависимость между p, z и v на каждой линіи тока

$$p = \sigma\left(C + gz - \frac{v^2}{2}\right), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(76)}$$

гдѣ C есть постоянная величина на одной и той же линіи тока, но значенія C, свойственныя разнымъ линіямъ тока, могутъ быть различны.

Эта зависимость, выражаемая обыкновенно подъ видомъ:

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\sigma g} - z = H \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(76, a)}$$

служитъ основною теоремою гидравлики и извѣстна подъ именемъ теоремы *Даніила Бернулли.*

Для установившагося движенія упругихъ жидкостей зависимость между давленіемъ, скоростью $\mathfrak{v}$ и ординатою z выразится формулою:

$$\frac{\mathfrak{v}^2}{2g}+\frac{1}{g}\int\frac{dp}{f(p)}-z=H\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;(77)$$

Ученіе объ упругихъ деформаціяхъ твердыхъ тѣлъ.

Прежде, чѣмъ начать изложеніе ученія объ упругихъ деформаціяхъ, или такъ называемой теоріи упругости твердыхъ тѣлъ, слѣдуетъ ознакомиться съ нѣкоторыми свойствами такъ называемыхъ *однородныхъ деформацій* и разсмотрѣть зависимость между напряженіями, дѣйствующими на площадки, проведенныя черезъ одну и ту же точку тѣла; это и составляетъ содержаніе двухъ послѣдующихъ главъ: IV-й и V-й.

IV.

Объ однородныхъ деформаціяхъ сплошнаго тѣла.

§ 22. Однородныя деформаціи.

Представимъ себѣ сплошное тѣло, движущееся и деформирующееся такимъ образомъ, что f_1, f_2, f_3 (§ 17-й, формулы (47)) суть линейныя функціи отъ $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$:

$$\left.\begin{aligned} x &= F_1(t) + \mathfrak{a}f_{11}(t) + \mathfrak{b}f_{12}(t) + \mathfrak{c}f_{13}(t) \\ y &= F_2(t) + \mathfrak{a}f_{21}(t) + \mathfrak{b}f_{22}(t) + \mathfrak{c}f_{23}(t) \\ z &= F_3(t) + \mathfrak{a}f_{31}(t) + \mathfrak{b}f_{32}(t) + \mathfrak{c}f_{33}(t) \end{aligned}\right\}, \qquad (78)$$

гдѣ $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ суть начальныя координаты (въ моментъ $t=0$) любой точки M тѣла, а x, y, z — координаты той же точки въ моментъ t; легко видѣть, что такая деформація имѣетъ слѣдующія свойства:

1) Всѣ тѣ точки тѣла, которыя въ моментъ $t=0$ находились въ какой либо плоскости:

$$A\mathfrak{a} + B\mathfrak{b} + C\mathfrak{c} + D = 0 \qquad (79)$$

будутъ и въ моментъ t находиться въ одной плоскости, уравненіе которой получится по исключеніи $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ изъ равенствъ (78) и (79); уравненіе это — слѣдующее:

$$\begin{vmatrix} x - F_1, f_{11}, f_{12}, f_{13} \\ y - F_2, f_{21}, f_{22}, f_{23} \\ z - F_3, f_{31}, f_{32}, f_{33} \\ -D, \ A, \ B, \ C \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (80)$$

Слѣдовательно, при такой деформаціи, каждая плоскость, проведенная въ тѣлѣ, остается плоскостью, хотя и измѣняетъ свое положеніе въ пространствѣ.

2) Какія либо двѣ параллельныя одна другой плоскости, проведенныя въ начальный моментъ въ тѣлѣ и выражаемыя уравненіями:

$$\left.\begin{aligned} A\mathfrak{a} + B\mathfrak{b} + C\mathfrak{c} + D = 0 \\ A\mathfrak{a} + B\mathfrak{b} + C\mathfrak{c} + D_1 = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (79, bis)$$

обращаются въ плоскости, параллельныя между собою.

Двѣ параллельныя одна другой плоскости, проведенныя въ тѣлѣ въ какой либо моментъ времени, будутъ параллельны между собою и во всѣ другіе моменты.

3) Всякая прямая линія, проведенная въ тѣлѣ въ какой либо моментъ времени, будетъ прямою и во всѣ другіе моменты.

4) Двѣ параллельныя одна другой прямыя линіи, проведенныя въ тѣлѣ въ какой либо моментъ времени, будутъ параллельными между собою прямыми и во всѣ другіе моменты.

5) Проведемъ въ моментъ $t = 0$ въ тѣлѣ двѣ параллельныя одна другой прямыя, на одной изъ нихъ возьмемъ двѣ точки M_{10} и M_{30} и на другой — двѣ точки M_{20} и M_{40}; пусть n есть отношеніе величины разстоянія $\overline{M_{10} M_{30}}$ къ величинѣ разстоянія $\overline{M_{20} M_{40}}$. То же самое отношеніе вмѣстѣ съ параллельностью длинъ $\overline{M_1 M_3}$ и $\overline{M_2 M_4}$ сохранится и во всѣ моменты времени; въ самомъ дѣлѣ, вслѣдствіе выбора начальныхъ положеній точекъ:

$$\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_1 = n(\mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_2), \ \mathfrak{b}_3 - \mathfrak{b}_1 = n(\mathfrak{b}_4 - \mathfrak{b}_2); \ \mathfrak{c}_3 - \mathfrak{c}_1 = n(\mathfrak{c}_4 - \mathfrak{c}_2); \ldots (81)$$

изъ равенствъ же (78), примѣненныхъ къ точкамъ M_1, M_2, M_3 и M_4, найдемъ:

$$x_3 - x_1 = (\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_1) f_{11} + (\mathfrak{b}_3 - \mathfrak{b}_1) f_{12} + (\mathfrak{c}_3 - \mathfrak{c}_1) f_{13},$$

$$x_4 - x_2 = (\mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_2) f_{11} + (\mathfrak{b}_4 - \mathfrak{b}_2) f_{12} + (\mathfrak{c}_4 - \mathfrak{c}_2) f_{13},$$

а потому, въ силу соотношеній (81), найдемъ:

$$x_3 - x_1 = n(x_4 - x_2), \ y_3 - y_1 = n(y_4 - y_1), \ z_3 - z_1 = n(z_4 - z_1),$$

...ражаетъ, что длина $\overline{M_1 M_3}$ параллельна длинѣ $\overline{M_2 M_4}$ и въ n разъ болѣе ...

6) Разсуждая далѣе, дойдемъ до такого заключенія, что всякія двѣ взаимно по... подобно расположенныя фигуры, начерченныя въ тѣлѣ въ какой либо мо... ...ѣняя, при разсматриваемой нами деформаціи тѣла, свой видъ, размѣры и по... въ пространствѣ, будутъ все таки сохранять свое взаимное подобіе по виду и ..., причемъ центромъ подобія будетъ все время служить та самая точка тѣла, ... была имъ и въ началѣ.

7) Представимъ себѣ неизмѣняемую среду, движущуюся поступательно вмѣстѣ съ ... либо изъ точекъ деформирующагося тѣла; пусть это будетъ точка $Ю$. Прове... черезъ эту точку координатныя оси, параллельныя неподвижнымъ осямъ и озна... черезъ x, y, z, a, b, c слѣдующія разности:

$$\mathrm{x} = x - x_ю,\ \mathrm{y} = y - y_ю,\ \mathrm{z} = z - z_ю,\ a = \mathfrak{a} - \mathfrak{a}_ю,\ b = \mathfrak{b} - \mathfrak{b}_ю,\ c = \mathfrak{c} - \mathfrak{c}_ю,$$

... относительныя координаты точекъ тѣла по отношенію къ проведеннымъ черезъ ... $Ю$ осямъ.

Относительное движеніе тѣла по отношенію къ этой средѣ можетъ быть выражено ... слѣдующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{x} &= af_{11}(t) + bf_{12}(t) + cf_{13}(t) \\ \mathrm{y} &= af_{21}(t) + bf_{22}(t) + cf_{23}(t) \\ \mathrm{z} &= af_{31}(t) + bf_{32}(t) + cf_{33}(t) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (82)$$

Эти формулы будутъ имѣть одинъ и тотъ же видъ, независимо отъ выбора точки ... значитъ, если вокругъ двухъ различныхъ точекъ тѣла выдѣлить одинаковые по ... размѣрамъ и положенію объемы вещества, то деформаціи этихъ двухъ объемовъ будутъ вполнѣ тождественны и выразятся однѣми и тѣми же формулами (82).

По всѣмъ этимъ причинамъ разсматриваемыя нами деформаціи вещества называ... *однородными деформаціями* (homogeneous strain).

§ 23. Эллипсоиды деформаціи и поверхность удлинненій. Кубическое расширеніе единицы объема вещества.

При дальнѣйшемъ изслѣдованіи свойствъ однородныхъ деформацій, мы будемъ разсматривать измѣненіе въ относительномъ распредѣленіи вещества тѣла вокругъ ка... либо точки $Ю$, причемъ будемъ сравнивать распредѣленіе вещества въ моментъ t съ распредѣленіемъ въ моментъ $t = 0$.

1) Возьмемъ формулы (82) и замѣнимъ въ нихъ знаки x, y, z—знаками x, y, z; ... эти формулы (82) выразятъ такую однородную деформацію, при которой начало координатъ остается неподвижнымъ.

Прежде всего отдадимъ себѣ отчетъ въ томъ, какое значеніе имѣютъ коэфиціенты ...альныхъ координатъ a, b, c во вторыхъ частяхъ формулъ (82).

Возьмемъ три точки тѣла: M_1 — начальныя координаты которой суть: $a_1 = 1$, $b_1 = 0$, $c_1 = 0$, M_2—начальныя координаты которой: $a_2 = 0$, $b_2 = 1$, $c_2 = 0$, и M_3—

начальныя координаты которой: $a_3 = 0$, $b_3 = 0$, $c_3 = 1$; эти три точки, стало быть, находятся въ моментъ $t = 0$ въ разстояніи равномъ единицѣ длины отъ начала координатъ O, первая — на оси X-овъ, вторая — на оси $У$-овъ, третья — на оси Z-овъ.

Изъ формулъ (82) слѣдуетъ, что въ моментъ t координаты этихъ точекъ будутъ:

$$\begin{array}{ccc} M_1' & M_2' & M_3' \\ x_1 = f_{11}(t), & x_2 = f_{12}(t), & x_3 = f_{13}(t) \\ y_1 = f_{21}(t), & y_2 = f_{22}(t), & y_3 = f_{23}(t) \\ z_1 = f_{31}(t), & z_2 = f_{32}(t), & z_3 = f_{33}(t). \end{array}$$

Поэтому формулы (82) можно представить такъ:

$$\left.\begin{array}{l} x = x_1 a + x_2 b + x_3 c \\ y = y_1 a + y_2 b + y_3 c \\ z = z_1 a + z_2 b + z_3 c \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (82, bis)$$

Обратимъ вниманіе на ту часть вещества тѣла, которая въ моментъ $t = 0$ заполняетъ собою кубъ, четыре вершины котораго суть точки O, M_1, M_2, M_3 (черт. 13-й на листѣ 1-мъ). Такъ какъ при однородной деформаціи всѣ прямыя линіи и плоскости остаются прямыми и плоскими, а параллельныя прямыя и плоскости сохраняютъ свою параллельность, то въ моментъ t содержимое этого куба будетъ заполнять собою параллелопипедъ, четыре вершины котораго будутъ O, M_1', M_2', M_2' (черт. 14-й); коэфиціенты $f_{11}(t)$, $f_{21}(t) \ldots f_{33}(t)$ суть координаты этихъ точекъ M_1', M_2', M_3'.

Длины реберъ этого параллелопипеда равны

$$\left.\begin{array}{l} OM_1' = L_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \\ OM_2' = L_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} \\ OM_3' = L_3 = \sqrt{x_3^2 + y_3^2 + z_2^2} \end{array}\right\}, \ldots\ldots\ldots\ldots (83)$$

а косинусы угловъ между ребрами его выражаются величинами слѣдующихъ отношеній:

$$\cos(M_2' OM_3') = \frac{H_1}{L_2 L_3},\ \cos(M_3' OM_1') = \frac{H_2}{L_3 L_1},\ \cos(M_1' OM_2') = \frac{H_3}{L_1 L_2}, \ldots (83, bis)$$

числители которыхъ H_1, H_2, H_3 суть слѣдующіе тричлены:

$$\left.\begin{array}{l} H_1 = x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3 \\ H_2 = x_3 x_1 + y_3 y_1 + z_3 z_1 \\ H_3 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (84)$$

2) Проведемъ изъ начала координатъ O какую либо длину $OM = r$. Вслѣдствіе однородности деформаціи, всѣ тѣ точки вещества, которыя въ моментъ $t = 0$ находятся на прямой OM, будутъ въ моментъ t находиться на одной прямой OM' съ новымъ положеніемъ точки M; означимъ длину OM' черезъ r'.

Величина отношенія:

$$e = \frac{r' - r}{r} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (85)$$

называется *линейнымъ удлинненіемъ единицы длины по протяженію* OM.

Если одновременно съ OM проведемъ изъ какой либо точки M_4 длину $M_4M_5 = l$ параллельную OM, то, на основаніи сказаннаго въ 5-мъ пунктѣ предыдущаго параграфа, длина $M_4'M_5' = l'$ будетъ параллельна r' и притомъ отношеніе $(l' : r')$ будетъ равно отношенію $(l : r)$; отсюда слѣдуетъ, что

$$\frac{l' - l}{l} = \frac{r' - r}{r} = e;$$

это значитъ, что въ однородной деформаціи длины параллельныя между собою получаютъ одинаковыя удлинненія на единицу длины.

Изъ (85) слѣдуетъ, что $r' = r(1 + e)$ или $(r')^2 = r^2(1 + e)^2$, а такъ какъ $r^2 = a^2 + b^2 + c^2$, $(r')^2 = x^2 + y^2 + z^2$, то на основаніи формулъ (82 *bis*), (83) и (84) получимъ слѣдующее равенство:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(1 + e)^2 = L_1^2 a^2 + L_2^2 b^2 + L_3^2 c^2 + 2H_1 bc + 2H_2 ca + 2H_3 ab, . (86)$$

изъ котораго можемъ опредѣлить величину e.

Между прочимъ можемъ замѣтить, что величины удлинненій e_1, e_2, e_3 единицъ длинъ линій, параллельныхъ осямъ координатъ выразятся такъ:

$$e_1 = L_1 - 1,\ e_2 = L_2 - 1,\ e_3 = L_3 - 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (87)$$

Для тѣхъ длинъ, которыя при деформаціи укорочиваются, величины e будутъ имѣть значенія отрицательныя.

3) Выдѣлимъ мысленно какую либо часть тѣла; пусть V и V' суть величины объемовъ этой части въ моменты $t = 0$ и t. Величина отношенія:

$$\theta = \frac{V' - V}{V} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (88)$$

называется *кубическимъ расширеніемъ единицы объема* взятой части тѣла.

Объемъ куба, изображеннаго на чертежѣ 13-мъ, равенъ единицѣ, объемъ же параллелопипеда, изображеннаго на чертежѣ 14-мъ, выразится опредѣлителемъ:

$$D = \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ y_1, & y_2, & y_3 \\ z_1, & z_2, & z_3 \end{vmatrix}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (89)$$

поэтому кубическое расширеніе вышесказаннаго объема будетъ равно:

$$\theta = D - 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (90)$$

Вслѣдствіе однородности деформаціи, кубическое расширеніе единицы объема одинаково во всѣхъ частяхъ тѣла.

Если θ будетъ отрицательнымъ, то это покажетъ, что вещество претерпѣваетъ кубическое сжатіе.

4) Уравненія (82 *bis*) рѣшимъ относительно a, b, c, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} a &= a_1 x + a_2 y + a_3 z \\ b &= b_1 x + b_2 y + b_3 z \\ c &= c_1 x + c_2 y + c_3 z \end{aligned}\right\}, \ldots\ldots\ldots\ldots (91)$$

входящіе здѣсь коэфиціенты a_1, $b_1 \ldots . c_3$ выражаются слѣдующимъ образомъ въ коэфиціентахъ x_1, y_1, $\ldots . z_3$:

$$a_1 D = (y_2 z_3 - z_2 y_3);\ a_2 D = (z_2 x_3 - x_2 z_3);\ a_3 D = (x_2 y_3 - y_2 x_3);$$

$$b_1 D = (y_3 z_1 - z_3 y_1);\ b_2 D = (z_3 x_1 - x_3 z_1);\ b_3 D = (x_3 y_1 - y_3 x_1);$$

$$c_1 D = (y_1 z_2 - z_1 y_2);\ c_2 D = (z_1 x_2 - x_1 z_2);\ c_3 D = (x_1 y_2 - y_1 x_2).$$

Изъ равенствъ (91) видно, что a_1, b_1, c_1 суть проэкціи на оси координатъ такой длины l_1, которая въ моментъ t совпадетъ съ осью X-овъ и будетъ тогда имѣть длину равную единицѣ; подобнымъ же образомъ: a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3 суть проэкціи длинъ l_2, l_3, которыя въ моментъ t сдѣлаются равными единицѣ и совпадутъ съ осями $У$-овъ и Z-овъ. Косинусы угловъ, составляемыхъ между собою направленіями длинъ l_1, l_2, l_3 (конечно, въ моментъ $t = 0$), выразятся величинами слѣдующихъ отношеній:

$$\cos(l_2, l_3) = \frac{h_1}{l_2 l_3},\ \cos(l_3, l_1) = \frac{h_2}{l_3 l_1},\ \cos(l_1, l_2) = \frac{h_3}{l_1 l_2}, \ldots\ldots (92)$$

гдѣ числители суть слѣдующіе тричлены:

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3, \\ h_2 &= a_3 a_1 + b_3 b_1 + c_3 c_1, \\ h_3 &= a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (93)$$

Равенство: $(r')^2 = r^2 (1 + e)^2$ можно теперь, на основаніи формулъ (91), представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (1 + e)^2 \left(l_1^2 x^2 + l_2^2 y^2 + l_3^2 z^2 + 2h_1 yz + 2h_2 zx + 2h_3 xy\right) \ldots (94)$$

5) Если въ моментъ $t=0$ опишемъ изъ центра O сферу радіуса равнаго единицѣ, то всѣ тѣ точки вещества, которыя въ моментъ $t=0$ были на поверхности ея, будутъ въ моментъ t на поверхности эллипсоида, выражаемаго слѣдующимъ уравненіемъ:

$$r'^2 = 1 = l_1^2 x^2 + l_2^2 y^2 + l_3^2 z^2 + 2h_1 yz + 2h_2 zx + 2h_3 xy \quad \ldots\ldots\ldots (95)$$

6) Съ другой стороны можно провести такой эллипсоидъ, имѣющій центръ в началѣ O координатъ, что всѣ точки вещества, находившіяся въ моментъ $t=0$ на поверхности этого эллипсоида, будутъ въ моментъ t находиться на поверхности сферы радіуса равнаго единицѣ: $r'=1$; уравненіе этого эллипсоида — слѣдующее:

$$L_1^2 a^2 + L_2^2 b^2 + L_3^2 c^2 + 2H_1 bc + 2H_2 ca + 2H_3 ab = 1 \quad \ldots\ldots (96)$$

Оба эти эллипсоида называются *эллипсоидами деформаціи;* но, имѣя ввиду разсматривать только второй эллипсоидъ, я буду впредь только его подразумѣвать подъ именемъ эллипсоида деформаціи.

7) Проведемъ въ тѣлѣ въ моментъ $t=0$ какую либо длину $OM=r$; пусть $OM'=r'$ есть величина и направленіе этой длины въ моментъ t. Возьмемъ проэкціи длины r' на первоначальное направленіе r и составимъ отношеніе:

$$\varepsilon = \frac{r' \cos(r', r) - r}{r} = \frac{rr' \cos(r', r) - r^2}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots (97)$$

Произведеніе $rr' \cos(r', r)$, равное $(xa + yb + zc)$, можно стало быть выразить, или подъ видомъ $r^2(1+\varepsilon)$, или же, на основаніи формулъ (82 *bis*) подъ видомъ шестичлена:

$$x_1 a^2 + y_2 b^2 + z_3 c^2 + (y_3 + z_2) bc + (z_1 + x_3) ca + (x_2 + y_1) ab.$$

Если представимъ себѣ, что по всѣмъ направленіямъ, проведеннымъ изъ точки O, будутъ отложены радіусы векторы r, обратно пропорціональные корнямъ квадратнымъ изъ соотвѣтственныхъ каждому направленію величинъ ε, то геометрическое мѣсто точекъ, находящихся на концахъ этихъ радіусовъ векторовъ, будетъ поверхность втораго порядка, выражаемая уравненіемъ: $r^2\varepsilon = K$, т. е.:

$$(x_1 - 1) a^2 + (y_1 - 1) b^2 + (z_1 - 1) c^2 +$$
$$+ (y_3 + z_2) bc + (z_1 + x_3) ca + (x_2 + y_1) ab = K; \quad \ldots\ldots\ldots (98)$$

эта поверхность называется *поверхностью удлинненій.*

Величины ε, соотвѣтствующія каждому радіусу вектору этой поверхности, обратно пропорціонально квадратамъ этихъ радіусовъ векторовъ.

§ 24. Главныя оси деформаціи. Разложеніе однородной деформаціи на чистую деформацію и на вращеніе.

Въ деформирующемся однороднымъ образомъ тѣлѣ можно найти такія направленія и такія плоскости, которыя будутъ взаимно-перпендикулярны, какъ въ моментъ $t=0$, такъ и въ моментъ t.

Для опредѣленія такихъ направленій и плоскостей будемъ искать въ тѣлѣ такое направленіе P, проведенное черезъ начало координатъ O и такую, проведенную черезъ O плоскость П, которыя были бы взаимно-перпендикулярны въ оба момента времени.

Пусть $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ суть косинусы угловъ, составляемыхъ этимъ направленіемъ P съ осями координатъ въ моментъ $t=0$, а $\Lambda_x, \Lambda_y, \Lambda_z$—косинусы угловъ, составляемыхъ тѣмъ же рядомъ точекъ тѣла съ осями въ моментъ t; если на первоначальномъ направленіи P отложимъ отъ O длину равную единицѣ, то начальныя координаты конца этой длины будутъ: $a=\lambda_x$, $b=\lambda_y$, $c=\lambda_z$. Означимъ черезъ E линейное удлинненіе этой длины; такъ какъ разстояніе конца ея отъ O въ моментъ t будетъ $(1+E)$, то координаты этой точки тогда будутъ: $x=(1+E)\Lambda_x$, $y=(1+E)\Lambda_y$, $z=(1+E)\Lambda_z$; примѣняя сюда формулы (82 *bis*), получимъ слѣдующія соотношенія между косинусами угловъ составляемыхъ съ осями координатъ направленіями: начальнымъ OP и измѣненнымъ вслѣдствіе деформаціи — OP':

$$\left.\begin{aligned}\Lambda_x(1+E)&=x_1\lambda_x+x_2\lambda_y+x_3\lambda_z\\ \Lambda_y(1+E)&=y_1\lambda_x+y_2\lambda_y+y_3\lambda_z\\ \Lambda_z(1+E)&=z_1\lambda_x+z_2\lambda_y+z_3\lambda_z\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(\mathbf{99}, a)$$

Проведемъ, въ моментъ t, плоскость черезъ начало координатъ O, перпендикулярную къ направленію P'; уравненіе этой плоскости Π' будетъ:

$$\Lambda_x X+\Lambda_y Y+\Lambda_z Z=0,$$

гдѣ X, Y, Z суть координаты тѣхъ точекъ тѣла, которыя въ моментъ t заключаются въ этой плоскости; пусть A, B, C суть начальныя координаты тѣхъ же точекъ.

Выразивъ, въ послѣднемъ уравненіи, косинусы $\Lambda_x, \Lambda_y, \Lambda_z$ въ косинусахъ λ_x, λ_y, λ_z по формуламъ (99) и координаты X, Y, Z въ координатахъ A, B, C по формуламъ (82 *bis*), получимъ слѣдующее уравненіе:

$$(L_1^2\lambda_x+H_3\lambda_y+H_2\lambda_z)A+(H_3\lambda_x+L_2^2\lambda_y+H_1\lambda_z)B+(H_2\lambda_x+H_1\lambda_y+L_3^2\lambda_z)C=0$$

той плоскости П, въ которой въ моментъ $t=0$ находились всѣ точки тѣла, расположившіяся въ моментъ t по плоскости Π'. Плоскость же П должна быть перпендикулярна къ направленію OP, поэтому коэфиціенты координатъ A, B, C должны быть пропорціональны косинусамъ λ_x, λ_y, λ_z; означивъ коэфиціентъ пропорціональности черезъ φ, получимъ три слѣдующія уравненія, которымъ должны удовлетворять эти косинусы:

$$\left.\begin{aligned}L_1^2\lambda_x+H_3\lambda_y+H_2\lambda_z&=\lambda_x\varphi\\ H_3\lambda_x+L_2^2\lambda_y+H_1\lambda_z&=\lambda_y\varphi\\ H_2\lambda_x+H_1\lambda_y+L_3^2\lambda_z&=\lambda_z\varphi\end{aligned}\right\};\ldots\ldots\ldots\ldots(\mathbf{100})$$

[Кро]мѣ того, косинусы эти связаны между собою еще четвертымъ равенствомъ:

$$\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(101)}$$

Если помножимъ первое изъ равенствъ (100) на λ_x, второе — на λ_y, третье — [на] λ_z, сложимъ и примемъ въ разсчетъ равенство (101), то получимъ:

$$L_1^2\lambda_x^2 + L_2^2\lambda_y^2 + L_3^2\lambda_z^2 + 2H_1\lambda_y\lambda_z + 2H_2\lambda_z\lambda_x + 2H_3\lambda_x\lambda_y = \varphi.$$

Изъ равенства же (86) слѣдуетъ, что первая часть этого равенства равна $(\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2)(1+E)^2$, стало быть $\varphi = (1+E)^2$.

Уравненія (100) суть тѣ самыя, которыя приходится рѣшать при опредѣленіи [гла]вныхъ осей эллипсоида, выражаемаго уравненіемъ (96), т. е. эллипсоида деформаціи.

Исключивъ изъ этихъ уравненій косинусы λ_x, λ_y, λ_z, получимъ уравненіе третьей [ст]епени относительно φ:

$$\begin{vmatrix} L_1^2 - \varphi, & H_3, & H_2 \\ H_3, & L_2^2 - \varphi, & H_1 \\ H_2, & H_1, & L_3^2 - \varphi \end{vmatrix} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(102)}$$

Если найдемъ три корня φ_1, φ_2, φ_3 этого уравненія, то изъ уравненій (100) и (101) найдемъ затѣмъ три совокупности значеній λ_x, λ_y, λ_z, опредѣляющихъ начальныя положенія трехъ направленій, соотвѣтствующихъ этимъ корнямъ.

Пусть корню φ_1 соотвѣтствуютъ косинусы λ_x, λ_y, λ_z, а корню φ_2 — косинусы μ_x, μ_y, μ_z; подставивъ въ равенство (100) вмѣсто φ — значеніе φ_2, вмѣсто λ_x, λ_y, λ_z — величины μ_x, μ_y, μ_z, помноживъ затѣмъ первое — λ_x, второе — на λ_y, третье — [на] λ_z и сложивъ, получимъ слѣдующее равенство:

$$(L_1^2\lambda_x + H_3\lambda_y + H_2\lambda_z)\mu_x + (H_3\lambda_x + L_2^2\lambda_y + H_1\lambda_z)\mu_y +$$
$$+ (H_2\lambda_x + H_1\lambda_y + L_3^2\lambda_z)\mu_z = \varphi_2(\mu_x\lambda_x + \mu_y\lambda_y + \mu_z\lambda_z);$$

[На] основаніи же равенствъ (100), примѣненныхъ къ значенію φ_1, первая часть составленнаго сейчасъ равенства есть ни что иное, какъ $\varphi_1(\lambda_x\mu_x + \lambda_y\mu_y + \lambda_z\mu_z)$, а потому:

$$(\varphi_1 - \varphi_2)(\lambda_x\mu_x + \lambda_y\mu_y + \lambda_z\mu_z) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(103)}$$

Основываясь на этомъ равенствѣ можно доказать, что всѣ три корня уравненія (102) дѣйствительны; въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что это уравненіе имѣетъ только одинъ дѣйствительный корень φ_3, два же прочіе суть мнимые сопряженные: $\varphi_1 = \rho + \varkappa i$ и $\varphi_2 = \rho + \varkappa i$, въ такомъ случаѣ и косинусы λ_x, μ_x, λ_y, μ_y, λ_z, μ_z окажутся (изъ (100) мнимыми и попарно сопряженными, т. е.:

$$\lambda_x = \alpha_1 + \beta_1 i,\ \lambda_y = \alpha_2 + \beta_2 i,\ \lambda_z = \alpha_3 + \beta_3 i$$
$$\mu_x = \alpha_1 - \beta_1 i,\ \mu_y = \alpha_2 - \beta_2 i,\ \mu_z = \alpha_3 - \beta_3 i,$$

а поэтому равенство (103) получитъ такой видъ:

$$2\varkappa i\,(\alpha_1^2+\beta_1^2+\alpha_2^2+\beta_2^2+\alpha_3^2+\beta_3^2)+0;$$

это требуетъ, чтобы $\varkappa$ было равно нулю, т. е. корни не должны быть мнимыми.

Корни уравненія (102) не только не могутъ быть мнимыми, но даже не могутъ быть отрицательными; для того, чтобы убѣдиться въ этомъ, разсмотрямъ каковы коэфиціенты у различныхъ степеней φ въ этомъ уравненіи:

$$\begin{vmatrix} L_1^2, & H_3, & H_2 \\ H_3, & L_2^2, & H_1 \\ H_2, & H_1, & L_3^2 \end{vmatrix} - \varphi\left\{\begin{vmatrix} L_2^2, & H_1 \\ H_1, & L_3^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} L_3^2, & H_2 \\ H_2, & L_1^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} L_1^2, & H_3 \\ H_3, & L_2^2 \end{vmatrix}\right\} +$$
$$+\varphi^2(L_1^2+L_2^2+L_3^2)-\varphi^3=0.$$

Первый членъ первой части есть ни что иное, какъ квадратъ опредѣлителя D (89); каждый изъ опредѣлителей втораго порядка, входящихъ въ составъ коэфиціента первой степени φ, равенъ суммѣ трехъ квадратовъ, напримѣръ:

$$\begin{vmatrix} L_2^2, & H_1 \\ H_1, & L_3^2 \end{vmatrix} = (y_2z_3-z_2y_3)^2+(z_2x_3-x_2z_3)^2+(x_2y_3-y_2x_3^2)=$$
$$=D^2(a_1^2+a_2^2+a_3^2);$$

поэтому уравненіе (102) можно представить такъ:

$$D^2-D^2(l_1^2+l_2^2+l_3^2)\,\varphi+(L_1^2+L_2^2+L_3^2)\,\varphi^2-\varphi^3=0.. \quad \textbf{(102, } bis\textbf{)}$$

Теперь уже прямо видно, что ни при какомъ отрицательномъ φ первая часть этого уравненія не можетъ обратиться въ нуль.

И такъ всѣ три корня уравненія (102) положительные; изъ равенства (103) слѣдуетъ, что если корни не равны между собою, то соотвѣтственныя имъ направленія взаимно-перпендикулярны. Пусть φ_1 есть наибольшій изъ трехъ корней, а φ_3 — наименьшій. Удлинненія E_1, E_2, E_3, соотвѣтствующія этимъ корнямъ называются *главными удлинненіями*, а соотвѣтствующія корнямъ направленія, по которымъ происходятъ эти удлинненія, называются *главными осями деформаціи*. Главныя оси деформаціи мы будемъ обозначать знаками Ξ, Υ, Z, притомъ направленія этихъ осей въ моментъ $t=0$ будемъ обозначать такъ Ξ_0, Υ_0, Z_0, въ направленія ихъ въ моментъ t — такъ Ξ_1, Υ_1, Z_1; косинусы угловъ между этими направленіями и неподвижными осями будемъ обозначать слѣдующими знаками:

		X	Y	Z		X	Y	Z
$E_1=\sqrt{\varphi_1}-1$	Ξ_0	λ_x	λ_y	λ_z	Ξ_1	Λ_x	Λ_y	Λ_z
$E_2=\sqrt{\varphi_2}-1$	Υ_0	μ_x	μ_y	μ_z	Υ_1	M_x	M_y	M_z
$E_3=\sqrt{\varphi_3}-1$	Z_0	ν_x	ν_y	ν_z	Z_1	N_x	N_y	N_z

Косинусы угловъ, составляемыхъ осями деформаціи въ моментъ t съ неподвижными осями, выразятся въ косинусахъ первоначальныхъ положеній по формуламъ (99, a) и еще по слѣдующимъ:

$$\left.\begin{aligned} M_x(1+E_2) &= x_1\mu_x + x_2\mu_y + x_3\mu_z \\ M_y(1+E_2) &= y_1\mu_x + y_2\mu_y + y_3\mu_y \\ M_z(1+E_2) &= z_1\mu_x + z_2\mu_y + z_3\mu_z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \mathbf{(99,}\ b\mathbf{)}$$

$$\left.\begin{aligned} N_x(1+E_3) &= x_1\nu_x + x_2\nu_y + x_3\nu_z \\ N_y(1+E_3) &= y_1\nu_x + y_2\nu_y + y_3\nu_z \\ N_z(1+E_3) &= z_1\nu_x + z_2\nu_y + z_3\nu_z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \mathbf{(99,}\ c\mathbf{)}$$

Изъ этихъ равенствъ можно получить выраженія для коэфиціентовъ x_1, y_1, ... въ функціяхъ отъ главныхъ линейныхъ удлинненій и восемнадцати косинусовъ, входящихъ въ равенство (99).

Помноживъ первое изъ (99, a) на λ_x, первое изъ (99, b) на μ_x и первое изъ (99, c) на ν_x и сложивъ, мы найдемъ, что во второй части множитель у x_1 будетъ равенъ $\lambda_x^2 + \mu_x^2 + \nu_x^2$, т. е. единицѣ, множители же у x_2 и x_3 будутъ равны нулю; такимъ образомъ получимъ первое изъ нижеприведенныхъ равенствъ, и подобнымъ же образомъ составимъ и остальныя восемь выраженій; а именно:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= (1+E_1)\lambda_x\Lambda_x + (1+E_2)\mu_x M_x + (1+E_3)\nu_x N_x \\ y_1 &= (1+E_1)\lambda_x\Lambda_y + (1+E_2)\mu_x M_y + (1+E_3)\nu_x N_y \\ z_1 &= (1+E_1)\lambda_x\Lambda_z + (1+E_2)\mu_x M_z + (1+E_3)\nu_x N_z \end{aligned}\right\} \ldots \mathbf{(104,}\ a\mathbf{)}$$

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= (1+E_1)\lambda_y\Lambda_x + (1+E_2)\mu_y M_x + (1+E_3)\nu_y N_x \\ y_2 &= (1+E_1)\lambda_y\Lambda_y + (1+E_2)\mu_y M_y + (1+E_3)\nu_y N_y \\ z_2 &= (1+E_1)\lambda_y\Lambda_z + (1+E_2)\mu_y M_z + (1+E_3)\nu_y N_z \end{aligned}\right\} \ldots \mathbf{(104,}\ b\mathbf{)}$$

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= (1+E_1)\lambda_z\Lambda_x + (1+E_2)\mu_z M_x + (1+E_3)\nu_z N_x \\ y_3 &= (1+E_1)\lambda_z\Lambda_y + (1+E_2)\mu_z M_y + (1+E_3)\nu_z N_y \\ z_3 &= (1+E_1)\lambda_z\Lambda_z + (1+E_2)\mu_z M_z + (1+E_3)\nu_z N_z \end{aligned}\right\} \ldots \mathbf{(104,}\ c\mathbf{)}$$

Такая однородная деформація, при которой направленіе главныхъ осей въ пространствѣ неизмѣняется, называется *чистою однородною деформаціею*.

Изъ вышеприведенныхъ формулъ (104) видно, что при чистой деформаціи должны быть равны между собою слѣдующіе коэфиціенты: $y_3 = z_2$, $z_1 = x_3$, $x_2 = y_1$, вслѣдствіе того, что направленія главныхъ осей остаются неизмѣнными въ пространствѣ.

Если, кромѣ того, главныя оси чистой деформаціи совпадаютъ съ неподвижными осями координатъ, то тогда изъ девяти коэфиціентовъ деформаціи только три не бу-

дутъ равны нулю, а именно: $x_1 = (1 + E_1)$, $y_2 = (1 + E_2)$, $z_3 = (1 + E_3)$ и сама деформація выразится такъ:

$$x = (1 + E_1)a,\ y = (1 + E_2)b,\ z = (1 + E_3)c \ldots\ldots. \textbf{(105)}$$

Возвращаясь опять къ какой бы то ни было однородной деформаціи, означимъ черезъ ξ, η, ζ относительныя координаты какой либо точки тѣла по отношенію къ осямъ Ξ_1, Υ_1, Z_1 (въ моментъ t), а черезъ α, β, γ — относительныя координаты той же точки тѣла по отношенію къ осямъ Ξ_0, Υ_0, Z_0 (въ моментъ $t = 0$). По извѣстнымъ формуламъ преобразованія прямоугольныхъ координатъ:

$$\xi = x\Lambda_x + y\Lambda_y + z\Lambda_z,\ \alpha = a\lambda_x + b\lambda_y + c\lambda_z,$$

подставивъ же вмѣсто x, y, z вторыя части равенствъ (82 *bis*) и принявъ затѣмъ во вниманіе выраженія (104) для коэфиціентовъ $x_1, y_1, \ldots z_3$, найдемъ, что ξ выразится такъ:

$$\xi = (1 + E_1)(a\lambda_x + b\lambda_y + c\lambda_z) = (1 + E_1)\alpha;$$

такимъ образомъ окажется, что:

$$\xi = (1 + E_1)\alpha,\ \eta = (1 + E_2)\beta,\ \zeta = (1 + E_3)\gamma; \ldots\ldots. \textbf{(106)}$$

это значитъ, что если представимъ себѣ неизмѣняемую среду, неизмѣнно связанную съ главными осями Ξ, Υ, Z, то, по отношенію къ этой средѣ, деформирующееся тѣло совершаетъ чистую деформацію, между тѣмъ какъ абсолютное движеніе этого тѣла есть соединеніе этой чистой деформаціи съ переноснымъ вращеніемъ вмѣстѣ съ неизмѣняемою средою и осями деформацій вокругъ начала координатъ O.

Изъ выраженій (105) и (106) прямо видно, что чистая деформація можетъ быть разсматриваема какъ соединеніе трехъ линейныхъ растяженій параллельно главнымъ осямъ деформаціи.

Примѣръ 1-й. Примѣнимъ сказанное въ настоящемъ параграфѣ къ опредѣленію главныхъ осей однородной деформаціи, выражающейся слѣдующими формулами:

$$x = a,\ y = ga + b,\ z = c.$$

Эта деформація состоитъ въ томъ, что всѣ плоскости, параллельныя плоскости YZ, сдвигаются параллельно оси Y-овъ на разстоянія, пропорціональныя a, т. е. разстоянію ихъ отъ плоскости YZ; при этомъ тѣ плоскости, которыя пересѣкаютъ положительную ось X-овъ, сдвигаются въ сторону положительной оси Y-овъ, тѣ же, которыя пересѣкаютъ отрицательную ось X-овъ, сдвигаются въ сторону отрицательной оси Y-овъ. Поэтому такая деформація называется *простымъ сдвигомъ параллельно плоскости YZ по оси Y-овъ*.

Коэфиціентъ g, выражаетъ *величину сдвига* той плоскости, которая отстоитъ отъ плоскости YZ на единицу длины. Возьмемъ ту точку тѣла, которая въ моментъ $t = 0$ имѣетъ положеніе K_0, опредѣляемое координатами $a = 1$, $b = -\frac{g}{2}$, $c =$

точка въ моментъ t будетъ имѣть положеніе K_1 (черт. 15), опредѣляемое координа- $x=1$, $y=\frac{g}{2}$, $c=0$; величина g равняется удвоенному тангену угла ψ, состав- направленіями OK_1 и OK_0 съ осью X-овъ; $g=2\operatorname{tg}\psi$.

Опредѣлимъ величины главныхъ удлинненій этой деформаціи, а также направле- главныхъ осей въ моменты $t=0$ и t.

Здѣсь $y_1=g$, $x_1=y_2=z_3=1$, $x_2=x_3=y_3=z_1=z_2=0$, затѣмъ:

$$L_1^2=1+g^2,\ L_2^2=L_3^2=1,\ H_1=H_2=0,\ H_3=g;$$

дѣлитель D равенъ единицѣ, поэтому кубическое расширеніе въ этой деформаціи нулю.

Уравненіе (102) въ этомъ случаѣ будетъ слѣдующее:

$$1-\varphi(3+g^2)+\varphi^2(3+g^2)-\varphi^3=(1-\varphi)(\varphi^2-\varphi(2+g^2)+1)=0;$$

его:

$$\varphi_1=1+\frac{g^2}{2}+\sqrt{g^2+\frac{g^4}{4}}=\left(\frac{g}{2}+\sqrt{1+\frac{g^2}{4}}\right)^2=(1+E_1)^2$$

$$\varphi_2=1,\ E_2=0,$$

$$\varphi_3=1+\frac{g^2}{2}-\sqrt{g^2+\frac{g^4}{4}}=\left(\sqrt{1+\frac{g^2}{4}}-\frac{g}{2}\right)^2=(1+E_3)^2.$$

Замѣнивъ g черезъ $2\operatorname{tg}\psi$, найдемъ, что $\sqrt{\varphi_1}$ и $\sqrt{\varphi_3}$ выражаются такъ:

$$\sqrt{\varphi_1}=\frac{1+\sin\psi}{\cos\psi}=\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\psi}{2}\right)$$

$$\sqrt{\varphi_3}=\frac{1-\sin\psi}{\cos\psi}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\psi}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{\varphi_1}}.$$

Такъ какъ уголъ ψ, а слѣдовательно также и $\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)$, менѣе прямаго, то $\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\psi}{2}\right)$ 45°, а потому $\sqrt{\varphi_1}$ болѣе единицы и $\sqrt{\varphi_3}$ менѣе единицы; изъ этого слѣдуетъ, E_1 есть величина положительная и выражаетъ расширеніе, а E_3 есть величина отри- и выражаетъ сжатіе. Величины ихъ суть:

$$E_1=\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\psi}{2}\right)-1,\ E_3=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\psi}{2}\right)-1.$$

Примѣнивъ уравненія (100) и (101) къ той главной оси Υ, которая не полу- ни удлинненія, ни сжатія, мы найдемъ, что они въ настоящемъ случаѣ будутъ:

$$g^2\mu_x+g\mu_y=0,\ g\mu_x=0,\ \mu_x^2+\mu_y^2+\mu_z^2=1,$$

слѣдуетъ: $\mu_x=0$, $\mu_y=0$, $\mu_z=\pm1$, т. е., что ось Υ совпадаетъ въ мо- $t=0$ съ осью Z-овъ. Изъ выраженій (99, b) видно, что то же самое положеніе эта ось и въ моментъ t.

Поэтому обѣ другія главныя оси находятся въ плоскости XY, такъ что λ_z, Λ_z, ν_z, N_z равны нулю.

Для опредѣленія положенія оси наибольшаго удлинненія Ξ въ моментъ $t=0$, достаточно будетъ взять слѣдующее изъ уравненій (100):

$$(g^2+1-\varphi_1)\lambda_x+g\lambda_y=0,$$

которое, послѣ надлежащихъ сокращеній, можно представить такъ:

$$-\left(\sqrt{1+\frac{g^2}{4}}-\frac{g}{2}\right)\lambda_x+\lambda_y=0,$$

а отсюда слѣдуетъ:

$$\frac{\lambda_y}{\lambda_x}=\operatorname{tg}(\Xi_0, X)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\psi}{2}\right);$$

такъ что ось Ξ_0 составляетъ съ осью X-овъ уголъ $\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\psi}{2}\right)$, а стало быть такой же самый уголъ составляетъ ось наибольшаго сжатія Z_0 съ отрицательною осью Y-овъ, т. е. ось Z_0 должна дѣлить уголъ $\overline{Y}OK_0$ пополамъ. Если изъ центра O провести кругъ радіусомъ равнымъ OK_0 (черт. 15-й) и точку A соединить съ K_0, то направленіе AK_0 будетъ параллельно оси Z_0, а направленіе BK_0 — параллельно оси Ξ_0.

По формуламъ (99) найдемъ положенія осей Ξ_1 и Z_1 въ моментъ t; окажется:

$$\Lambda_x=\frac{\lambda_x}{1+E_1}=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\psi}{2}\right),\quad \Lambda_y=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\psi}{2}\right),$$

т. е. ось Ξ_1 дѣлитъ пополамъ уголъ K_1OY; направленіе BK_1 параллельно оси Ξ_1 и направленіе AK_1 параллельно оси Z_1.

Сдвигаемыя плоскости, параллельныя плоскости YZ, не претерпѣваютъ искаженія; кромѣ того, есть еще другая система параллельныхъ между собою плоскостей, на которыхъ въ моментъ t расположеніе точекъ тѣла тождественно съ тѣмъ, которое было въ моментъ $t=0$; это именно суть тѣ плоскости, которыя вначалѣ были параллельны плоскости ZOK_0, а въ моментъ t стали параллельными плоскости ZOK_1; по направленіямъ, заключающимся въ этихъ плоскостяхъ, вещество не получило ни растяженія, ни сжатія.

Чистая часть деформаціи при простомъ сдвигѣ состоитъ изъ линейнаго растяженія по оси Ξ, равнаго E_1, и изъ линейнаго сжатія по оси Z, равнаго E_3, то есть отрицательно взятому отношенію E_1 къ $(1+E_1)$; всякая длина параллельная оси Ξ увеличивается въ отношеніи $(1+E_1)$ къ единицѣ, всякая же длина параллельная оси Z уменьшается въ отношеніи единицы къ $(1+E_1)$. Если ось Ξ будетъ неизмѣнно направлена по оси Y-овъ, а ось Z по оси X-овъ, то такая чистая деформація выразится такъ:

$$x=\frac{1}{1+E_1}a=\left(\sqrt{1+\frac{g^2}{4}}-\frac{g}{2}\right)a=a\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\psi}{2}\right),$$

$$y=(1+E_1)b=\left(\sqrt{1+\frac{g^2}{4}}+\frac{g}{2}\right)b=b\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\psi}{2}\right),\quad z=c.$$

§ 25. Коническія поверхности равнаго удлинненія. Неискажающіяся плоскости.

Изъ уравненій (86) и (94) параграфа 23-го слѣдуетъ, что направленія, по ко... удлинненіе имѣетъ одинаковую величину e (не бо́льшую E_1 и не меньшую E_2), ...льны производящимъ конической поверхности втораго порядка, видъ которой ...чальномъ состояніи тѣла выражается уравненіемъ (86), а при состояніи тѣла въ ...ъ t — уравненіемъ (94); каждая такая поверхность называется *коническою по...стью равныхъ удлинненій*.

Длины радіусовъ векторовъ эллипсоида деформаціи, лежащихъ на одной и той ...ической поверхности этого рода, равны между собою.

Коническая поверхность удлинненій равныхъ E_2 состоитъ изъ двухъ плоскостей, ...ющихся по средней оси эллипсоида деформаціи и образующихъ круговыя сѣ... этого эллипсоида.

Углы между радіусами векторами, находящимися въ одной и той же плоскости ...аго сѣченія, остаются неизмѣненными при деформаціи; чтобы убѣдиться въ этомъ, ...ъ выраженіе косинуса угла, составляемаго съ осью Υ какимъ либо радіусомъ ...ъ r' въ моментъ t; это выраженіе будетъ:

$$\frac{x\mathrm{M}_x + y\mathrm{M}_y + z\mathrm{M}_z}{r'};$$

...въ сюда вмѣсто x, y, z — выраженія (82 *bis*) и вмѣсто M_x, M_y, M_z — выра... (99, *b*), найдемъ, что на основаніи равенствъ (100), примѣненныхъ къ оси Υ, ...щее выраженіе получитъ слѣдующій видъ:

$$(1+E_2)\frac{a\mu_x + b\mu_y + c\mu_z}{r'};$$

...радіусъ векторъ заключается въ плоскости одного изъ круговыхъ сѣченій, то ... $=r(1+E_2)$, а потому предыдущее выраженіе обратится въ:

$$\frac{a\mu_x + b\mu_y + c\mu_z}{r},$$

...въ косинусъ угла, составляемаго начальнымъ направленіемъ r съ начальнымъ ...ъ оси Υ.

Слѣдовательно всякія фигуры, начерченныя въ плоскостяхъ круговыхъ сѣченій ...ъ только расширеніе E_2 по всѣмъ направленіямъ, не претерпѣвая искаженія; ... плоскости параллельныя круговымъ сѣченіямъ эллипсоида деформаціи могутъ ...ваны *неискажающимися плоскостями*.

Въ чистой деформаціи, разсмотрѣнной въ концѣ предыдущаго параграфа, неиска...щіяся плоскости параллельны направленіямъ:

$$a = \pm b\,(1+E_1) = \pm b \cot\!\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right)$$

...нтъ $t=0$, въ моментъ же t онѣ параллельны направленіямъ:

$$\pm x\,(1+E_1) = y;\quad x = \pm y \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right).$$

§ 26. О соединенiи однородныхъ деформацiй.

Въ параграфѣ 24-мъ было уже упомянуто, что всякую чистую деформацiю мож разсматривать, какъ соединенiе трехъ растяженiй параллельно главнымъ осямъ чис деформацiи.

Кромѣ того, всякую чистую деформацiю можно еще образовать изъ чистаго сдви изъ растяженiя или сжатiя перпендикулярнаго къ плоскости сдвига и изъ равном наго растяженiя или сжатiя по всѣмъ направленiямъ.

Въ самомъ дѣлѣ, подвергнемъ тѣло сначала чистому сдвигу въ плоскости X такому, чтобы ось X-овъ была осью наибольшаго растяженiя E, а ось $У$-овъ о наибольшаго сжатiя $(-E : 1 + E)$; результатъ этой деформацiи будетъ:

$$x = a\,(1 + E),\ y = \frac{b}{1 + E},\ z = c.$$

Затѣмъ, подвергнемъ деформированное тѣло растяженiю равному B по оси Z- новыя координаты (x), (y), (z) выразятся въ координатахъ x, y, z такъ:

$$(x) = x,\ (y) = y,\ (z) = z\,(1 + B).$$

Наконецъ подвергнемъ послѣ этого тѣло равномѣрному растяженiю A по в направленiямъ, послѣ чего точки тѣла будутъ имѣть координаты $((x))$, $((y))$, (выражаемыя въ предыдущихъ координатахъ такъ:

$$((x)) = (x)\,(1 + A),\ ((y)) = (y)\,(1 + A),\ ((z)) = (z)\,(1 + A).$$

Результатъ этихъ трехъ деформацiй выразится слѣдующимъ образомъ въ к динатахъ a, b, c:

$$((x)) = a\,(1 + E)\,(1 + A),$$

$$((y)) = b\,\frac{(1 + A)}{1 + E},$$

$$((z)) = c\,(1 + B)\,(1 + A).$$

Отсюда слѣдуетъ, что всякую чистую деформацiю съ главными удлинненiям E_2, E_3 можно разложить на чистый сдвигъ съ удлинненiемъ E по оси X-овъ, на р женiе B по оси Z-овъ и на равномѣрное удлинненiе A по всѣмъ направленiям E, B и A выразятся такъ:

$$1 + E = \sqrt{\frac{1 + E_1}{1 + E_2}},\ 1 + A = \sqrt{(1 + E_1)\,(1 + E_2)},$$

$$1 + B = \frac{1 + E_3}{1 + A} = \frac{1 + E_3}{\sqrt{(1 + E_1)\,(1 + E_2)}}.$$

Въ этомъ случаѣ совершенно безразлично, въ какой послѣдовательности эти три деформацiи приложены къ тѣлу; вообще же говоря результатъ послѣдо наго приложенiя двухъ или нѣсколькихъ однородныхъ деформацiй измѣняется

...нѣ порядка приложенія деформацій. Такъ, напримѣръ, если тѣло будетъ подверг... сначала растяженію k по оси X-овъ:

$$x = a\,(1 + k),\ y = b,\ z = c,$$

а затѣмъ слѣдующей деформаціи:

$$(x) = -y,\ (y) = x\,(1 + \varkappa),\ (z) = z,$$

...результатъ этихъ двухъ деформацій будетъ такой:

$$(x) = -b,\ (y) = a\,(1 + k)\,(1 + \varkappa),\ (z) = c,$$

...—растяженіе по оси Ξ, равное $(k + \varkappa + k\varkappa)$, сопровождаемое поворотомъ осей де...маціи на прямой уголъ слѣва на право, причемъ ось растяженія (Ξ) сначала совпа... съ осью X-овъ, а подъ конецъ совпадаетъ съ осью $У$-овъ.

Если же перемѣнить порядокъ деформацій, приложивъ сначала деформацію:

$$x = -b,\ y = a\,(1 + \varkappa),\ z = c,$$

...потомъ растяженіе k по оси X-овъ:

$$(x) = x\,(1 + k),\ (y) = y,\ (z) = z,$$

...результатъ будетъ слѣдующій:

$$(x) = -b\,(1 + k),\ (y) = a\,(1 + \varkappa),\ (z) = c:$$

... — растяженіе по оси Ξ, равное k, и растяженіе по оси Υ, равное $\varkappa$, сопровождае... поворотомъ осей деформаціи слѣва на право на прямой уголъ, причемъ оси Ξ_0 и ... совпадали: первая — съ положительною осью $У$-овъ и вторая — съ отрицательною ... X-овъ, оси же Ξ_1 и Υ_1 совпадаютъ: первая—съ отрицательною осью X-овъ, вто... — съ отрицательною осью $У$-овъ.

Разсмотримъ теперь слѣдующій примѣръ.

Примѣръ 2-й.

Сначала произведенъ простой сдвигъ величины g, тотъ самый, который разсмо...ѣнъ въ примѣрѣ 1-мъ:

$$x = a,\ y = ag + b,\ z = c;$$

...ѣмъ произведенъ сдвигъ такой же величины, но параллельно плоскости ZX и при... по направленію положительной оси X-овъ:

$$(x) = x + yg,\ (y) = y,\ (z) = z.$$

Въ результатѣ получается слѣдующая *чистая* деформація:

$$(x) = a\,(1 + g^2) + bg,\ (y) = ag + b,\ (z) = c.$$

Очевидно, что здѣсь, какъ и въ примѣрѣ 1-мъ, одинъ изъ корней φ равенъ единицѣ и соотвѣтствующая ему главная ось совпадаетъ съ осью Z; назовемъ двѣ другія главныя оси — осями Ξ и Υ, а соотвѣтствующіе имъ корни означимъ черезъ φ_1 и φ_2.

Здѣсь

$$L_1^2 = 1 + 3g^2 + g^4,\ L_2^2 = 1 + g^2,\ H_3 = 2g\left(1 + \frac{g^2}{2}\right),\ D = 1;$$

уравненіе, опредѣляющее корни φ_1 и φ_2:

$$1 - \varphi\,(2 + 4g^2 + g^4) + \varphi^2 = 0,$$

самые корни суть:

$$\varphi_1 = 1 + 2g^2 + \frac{g^4}{2} + \sqrt{4g^2 + 5g^4 + 2g^6 + \frac{g^8}{4}},$$

$$\varphi_2 = 1 + 2g^2 + \frac{g^4}{2} - \sqrt{4g^2 + 5g^4 + 2g^6 + \frac{g^8}{4}},$$

$$\varphi_1 = \left(1 + \frac{g^2}{2} + g\sqrt{1 + \frac{g^2}{4}}\right)^2,\ \varphi_2 = \left(1 + \frac{g^2}{2} - g\sqrt{1 + \frac{g^2}{4}}\right)^2,$$

$$E_1 = g\left(\frac{g}{2} + \sqrt{1 + \frac{g^2}{4}}\right),\ E_2 = -g\left(\sqrt{1 + \frac{g^2}{4}} - \frac{g}{2}\right).$$

Такъ какъ

$$L_1^2 - \varphi_1 = -H_3\left(\sqrt{1 + \frac{g^2}{4}} - \frac{g}{2}\right),\ H_3 = 2g\left(1 + \frac{g^2}{2}\right),$$

то окажется, что ось Ξ имѣетъ слѣдующее положеніе:

$$\frac{\lambda_y}{\lambda_x} = \operatorname{tg}(\Xi, X) = \sqrt{1 + \frac{g^2}{4}} - \frac{g}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right).$$

Если же эти два сдвига будутъ произведены въ обратномъ порядкѣ, то результатъ ихъ будетъ опять *чистая* деформація:

$$(x) = a + bg,\ (y) = ag + b\,(1 + g^2),\ (z) = c.$$

Здѣсь

$$L_1^2 = 1 + g^2,\ L_2^2 = 1 + 3g^2 + g^4,\ H_3 = 2g\left(1 + \frac{g^2}{2}\right),\ D = 1,$$

корни и величины E_1 и E_2 тѣ же, но:

$$L_1^2 - \varphi_1 = -H_3\left(\frac{g}{2} + \sqrt{1 + \frac{g^2}{4}}\right),$$

$$\frac{\lambda_y}{\lambda_x} = \operatorname{tg}(\Xi, X) = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right);$$

т. е. теперь ось Ξ составляетъ уголъ $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right)$ съ осью Y-въ.

Такая деформація можетъ быть названа *двойнымъ сдвигомъ* въ плоскости XY.

Двѣ какія либо чистыя деформаціи, приложенныя одна за другою, даютъ въ результатѣ деформацію сопровождаемую вращеніемъ. Предоставляемъ читателю убѣдиться въ томъ, что *величины* главныхъ удлинненій составной деформаціи не зависятъ отъ того, въ какомъ порядкѣ были приложены составляющія чистыя деформаціи.

§ 27. Объ однородныхъ ничтожно-малыхъ деформаціяхъ.

Подъ этимъ именемъ подразумѣваются такія однородныя деформаціи, коэфиціенты которыхъ x_2, x_3, y_1, y_3, z_1, z_2 настолько малы, а коэфиціенты x_1, y_2, z_3 настолько мало разнятся отъ единицы, что можно пренебречь квадратами и произведеніями этихъ величинъ сравнительно съ ихъ первыми степенями.

При такой деформаціи *перемѣщенія точекъ тѣла ничтожно малы сравнительно съ первоначальными величинами координатъ.*

Пусть:

$$\left.\begin{aligned} x &= a(1+\varepsilon_1)+b\vartheta_3+c\vartheta_2, \\ y &= a\varkappa_3+b(1+\varepsilon_2)+c\vartheta_1, \\ z &= a\varkappa_2+b\varkappa_1+c(1+\varepsilon_3), \end{aligned}\right\} \qquad (107)$$

есть одна изъ такихъ ничтожно-малыхъ деформацій.

Составивъ выраженія (87), (84) и (90) параграфа (23), а также выраженія (88 *bis*) и пренебрегая въ нихъ квадратами, произведеніями и высшими степенями ничтожно-малыхъ величинъ ε_1, ε_2, ε_3, ϑ, $\varkappa$ сравнительно съ первыми ихъ степенями, найдемъ слѣдующее:

$$e_1 = \sqrt{1+2\varepsilon_1}-1 = \varepsilon_1,\ e_2 = \varepsilon_2,\ \varepsilon_3 = \varepsilon_3 \qquad (108)$$

$$\cos(M_2'OM_3') = \frac{\varkappa_1+\vartheta_1}{(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)} = \varkappa_1+\vartheta_1,\ \cos(M_3'OM_1') = \varkappa_2+\vartheta_2,$$

$$\cos(M_1'OM_2') = \varkappa_3+\vartheta_3,\ \theta = \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3 \qquad (109)$$

Слѣдовательно, *при однородной ничтожно-малой деформаціи коэфиціенты ε_1, ε_2, ε_3 суть величины удлинненій единицъ длинъ, параллельныхъ осямъ координатъ, суммы $(\varkappa_1+\vartheta_1)$, $(\varkappa_2+\vartheta_2)$, $(\varkappa_3+\vartheta_3)$ выражаютъ величины косинусовъ угловъ, образуемыхъ послѣ деформаціи тѣми направленіями, которыя первоначально были параллельны осямъ координатъ, а сумма $(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)$ выражаетъ величину кубическаго расширенія единицы объема вещества.*

Двѣ какія либо ничтожно-малыя деформаціи, сообщенныя одному и тому же веществу, даютъ въ результатѣ также ничтожно-малую деформацію, коэфиціенты которой равны суммамъ соотвѣтствующихъ коэфиціентовъ составляющихъ деформацій; въ самомъ дѣлѣ, если первая и вторая ничтожно-малыя деформаціи суть (107) и слѣдующая:

$$\begin{aligned} (x) &= x(1+\varepsilon_1')+y\vartheta_3'+z\vartheta_2', \\ (y) &= x\varkappa_3'+y(1+\varepsilon_2')+z\vartheta_1', \\ (z) &= x\varkappa_2'+y\varkappa_1'+z(1+\varepsilon_3'), \end{aligned}$$

то, пренебрегая произведеніями коэфиціентовъ сравнительно съ первыми степенями ихъ, получимъ:

$$(x) = a\,(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1') + b\,(\vartheta_3 + \vartheta_3') + c\,(\vartheta_2 + \vartheta_2'),$$

$$(y) = a\,(\varkappa_3 + \varkappa_3') + b\,(1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_2') + c\,(\vartheta_1 + \vartheta_1'),$$

$$(z) = a\,(\varkappa_2 + \varkappa_2') + b\,(\varkappa_1 + \varkappa_1') + c\,(1 + \varepsilon_3 + \varepsilon_3').$$

Отсюда видно еще, *что совершенно безразлично, въ какомъ порядкѣ будутъ произведены ничтожно-малыя деформаціи одна за другою и что результатъ будетъ тотъ же самый, если обѣ деформаціи будутъ произведены одновременно.*

При ничтожно-малой деформаціи величины главныхъ удлинненій E_1, E_2, E_3 ничтожно-малы, а также ничтожно-малы и измѣненія косинусовъ угловъ при вращеніи осей, такъ что, напримѣръ, Λ_x разнится отъ λ_x на ничтожно-малую величину $\Delta\lambda_x$. Пренебрегая квадратами и произведеніями ничтожно-малыхъ величинъ и принимая во вниманіе, что:

$$\lambda_x\Delta\lambda_x + \mu_x\Delta\mu_x + \nu_x\Delta\nu_x = 0,$$

$$\lambda_y\Delta\lambda_y + \mu_y\Delta\mu_y + \nu_y\Delta\nu_y = 0,$$

$$\lambda_z\Delta\lambda_z + \mu_z\Delta\mu_z + \nu_z\Delta\nu_z = 0,$$

найдемъ изъ формулъ (104) слѣдующія выраженія для коэфиціентовъ ничтожно-малой деформаціи:

$$\left.\begin{aligned} 1 + \varepsilon_1 &= 1 + E_1\lambda_x^2 + E_2\mu_x^2 + E_3\nu_x^2 \\ 1 + \varepsilon_2 &= 1 + E_1\lambda_y^2 + E_2\mu_y^2 + E_3\nu_y^2 \\ 1 + \varepsilon_3 &= 1 + E_1\lambda_z^2 + E_2\mu_z^2 + E_3\nu_z^2 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (110)$$

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_1 &= g_1 - \omega_1, \quad \vartheta_2 = g_2 + \omega_2 \quad \vartheta_3 = g_3 - \omega_3 \\ \varkappa_1 &= g_1 + \omega_1, \quad \varkappa_2 = g_2 - \omega_2 \quad \varkappa_3 = g_3 + \omega_3 \end{aligned}\right\}, \ldots\ldots \quad (111)$$

гдѣ:

$$\left.\begin{aligned} g_1 &= E_1\lambda_y\lambda_z + E_2\mu_y\mu_z + E_3\nu_y\nu_z \\ g_2 &= E_1\lambda_z\lambda_x + E_2\mu_z\mu_x + E_3\nu_z\nu_x \\ g_3 &= E_1\lambda_x\lambda_y + E_2\mu_x\mu_y + E_3\nu_x\nu_y \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (112)$$

$$\omega_1 = \lambda_y\Delta\lambda_z + \mu_y\Delta\mu_z + \nu_y\Delta\nu_z = -(\lambda_z\Delta\lambda_y + \mu_z\Delta\mu_y + \nu_z\Delta\nu_y)$$

$$\omega_2 = \lambda_z\Delta\lambda_x + \mu_z\Delta\mu_x + \nu_z\Delta\nu_x = -(\lambda_x\Delta\lambda_z + \mu_x\Delta\mu_z + \nu_x\Delta\nu_z)$$

$$\omega_3 = \lambda_x\Delta\lambda_y + \mu_x\Delta\mu_y + \nu_x\Delta\nu_y = -(\lambda_y\Delta\lambda_x + \mu_y\Delta\mu_x + \nu_y\Delta\nu_x).$$

Отсюда слѣдуетъ, что всякая ничтожно-малая деформація можетъ быть разложена на ничтожно-малую чистую деформацію:

$$\left.\begin{aligned} x &= a(1+\varepsilon_1)+bg_3+cg_2 \\ y &= ag_3+b(1+\varepsilon_2)+cg_1 \\ z &= ag_2+bg_1+c(1+\varepsilon_3) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(113)}$$

и на ничтожно-малое вращеніе:

$$x=a+\omega_2 c-\omega_3 b,\; y=b+\omega_3 a-\omega_1 c,\; z=c+\omega_1 b-\omega_2 a \ldots\ldots \quad \textbf{(114)}$$

Ничтожно-малыя измѣненія, получаемыя координатами точекъ при этомъ враще-ніи, т. е. разности $(x-a)$, $(y-b)$, $(z-c)$, выражаются формулами, совершенно ана-логичными тѣмъ формуламъ кинематики твердаго тѣла, которыя выражаютъ проэкціи скоростей точекъ твердаго тѣла, вращающагося вокругъ начала координатъ (см. фор-мулы (96) стр. 85-й кинемат. части составленнаго мною курса); притомъ выраженія величинъ ω_1, ω_2, ω_3 аналогичны выраженіямъ проэкцій P, Q, R угловой скорости на оси координатъ X, Y, Z, если эти проэкціи выражены въ косинусахъ λ_x, λ_y, ... ν_z и производныхъ отъ этихъ косинусовъ по времени (см. формулы (95) стр. 84-й кине-матич. части того же курса); разница между выраженіями для P, Q, R и для ω_1, ω_2, ω_3 состоитъ въ томъ, что въ послѣднихъ находятся приращенія $\Delta\lambda_x$, $\Delta\lambda_y$, ... $\Delta\nu_z$ на тѣхъ же мѣстахъ, на которыхъ находятся производныя λ'_x, λ'_y, ... ν'_z въ первыхъ.

Изъ этой аналогіи видно, что $\omega=\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2}$ есть ничтожно-малое угло-вое перемѣщеніе тѣла при вращеніи (114) и что направленіе, составляющее съ осями координатъ углы, косинусы которыхъ равны отношеніямъ:

$$\frac{\omega_1}{\omega},\ \frac{\omega_2}{\omega},\ \frac{\omega_3}{\omega},$$

есть мгновенная ось вращенія тѣла; такъ что тѣло, при вращеніи (114), поворачи-вается какъ твердое тѣло вокругъ этой оси на ничтожно-малый уголъ ω.

Величины ω_1, ω_2, ω_3 можно назвать *проэкціями на оси* X, Y, Z *угловаго пе-ремѣщенія тѣла* ω при ничтожно-малой деформаціи (107).

Чистая деформація (113) можетъ быть разложена на шесть составляющихъ чи-стыхъ же деформацій, а именно:

на ничтожно-малое растяженіе величины ε_1 (на единицу длины) параллельно оси X-овъ,
„ „ „ „ ε_2 „ „ Y-овъ,
„ „ „ „ ε_3 „ „ Z-овъ,
на двойной сдвигъ величины $2g_1$ въ плоскости YZ,
„ „ „ „ $2g_2$ „ „ ZX,
„ „ „ „ $2g_3$ „ „ XY.

Величины g_1, g_2, g_3 и проэкціи угловаго перемѣщенія выражаются такъ:

$$\left.\begin{aligned} g_1 &= \tfrac{1}{2}(\varkappa_1+\vartheta_1) \\ g_2 &= \tfrac{1}{2}(\vartheta_2+\varkappa_2) \\ g_3 &= \tfrac{1}{2}(\varkappa_3+\vartheta_3) \end{aligned}\right\} \ldots \textbf{(115)} \qquad \left.\begin{aligned} \omega_1 &= \tfrac{1}{2}(\varkappa_1-\vartheta_1) \\ \omega_2 &= \tfrac{1}{2}(\vartheta_2-\varkappa_2) \\ \omega_3 &= \tfrac{1}{2}(\varkappa_3-\vartheta_3) \end{aligned}\right\} \ldots \textbf{(116)}$$

V.

Объ эллипсоидѣ напряженій и поверхности направленій.

§ 28. Главныя напряженія.

Въ этой главѣ разсмотримъ зависимость между напряженіями, дѣйствующими на всевозможныя площадки, проведенныя черезъ одну и ту же точку M внутри тѣла.

Въ § 9-мъ было уже показано, что если будемъ знать величины:

$$X_x, Y_x, Z_x, X_y, Y_y, Z_y, X_z, Y_z, Z_z$$

для какой либо точки M сплошнаго тѣла, то, при помощи формулъ (14), будемъ имѣть возможность опредѣлить проэкціи на оси координатъ напряженія, дѣйствующаго въ той же точкѣ (и отнесеннаго къ единицѣ площади) на площадку, нормаль къ которой имѣетъ какое угодно направленіе.

Въ § же 11-мъ было показано, что $Y_z = Z_y$, $Z_x = X_z$, $X_y = Y_x$.

Такимъ образомъ мы уже имѣемъ въ формулахъ (14) выраженіе той зависимости, которую намъ предстоитъ здѣсь разсмотрѣть. Введя обозначенія:

$$N_1 = N_x = X_x,\ N_2 = N_y = Y_y,\ N_3 = N_z = Z_z \quad \ldots\ldots (117, a)$$

$$T_1 = T_{yz} = Z_y = Y_z,\ T_2 = T_{zx} = X_z = Z_x,\ T_3 = T_{xy} = Y_x = X_y \quad .(117, b)$$

$$\lambda = \cos(n, X),\ \mu = \cos(n, Y),\ \nu = \cos(n, Z),$$

представимъ эти формулы подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\left.\begin{aligned} F_n \cos(F_n, X) &= X_n = N_1\lambda + T_3\mu + T_2\nu \\ F_n \cos(F_n, Y) &= Y_n = T_3\lambda + N_2\mu + T_1\nu \\ F_n \cos(F_n, Z) &= Z_n = T_2\lambda + T_1\mu + N_3\nu \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (14\ bis)$$

Прежде всего обратимъ вниманіе на возможность найти такія положенія площадки, при которыхъ напряженіе будетъ направлено перпендикулярно къ площадкѣ; въ самомъ дѣлѣ, предположивъ, что:

$$X_n = \pm\lambda F,\ Y_n = \pm\mu F,\ Z_n = \pm\nu F,$$

получимъ изъ уравненій (14 *bis*) равенства:

$$\left.\begin{aligned} (N_1 - (\pm F))\,\lambda + T_3\,\mu + T_2\,\nu &= 0 \\ T_3\,\lambda + (N_2 - (\pm F))\,\mu + T_1\,\nu &= 0 \\ T_2\,\lambda + T_1\,\mu + (N_3 - (\pm F))\,\nu &= 0 \end{aligned}\right\}, \ldots\ldots\ldots (118)$$

...ъ которыхъ (и изъ равенства $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$) предстоитъ найти такое направле... n, чтобы напряженіе F, приложенное къ площадкѣ перпендикулярной къ n, было ...равлено вдоль по n (знакъ $+$), или противоположно n (знакъ минусъ).

Такъ какъ эти равенства сходны по виду съ равенствами (100) предыдущей ...вы, то безъ новаго доказательства можемъ утвердительно сказать, что навѣрно су...ствуютъ три взаимно перпендикулярныя площадки такія, на которыя дѣйствуютъ ...пряженія по нормалямъ или противоположно нормалямъ. Величины напряженій, дѣй...вующихъ на эти площадки, суть три корня Γ_1, Γ_2, Γ_3 уравненія третьей степени:

$$\begin{vmatrix} N_1 - \Gamma, & T_3, & T_2, \\ T_3, & N_2 - \Gamma, & T_1, \\ T_2, & T_1, & N_3 - \Gamma \end{vmatrix} = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(119)}$$

... есть:

$$A - B\Gamma + C\Gamma^2 - \Gamma^3 = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(119, \textit{bis})}$$

$$A = N_1N_2N_3 - N_2N_3T_1^2 - N_3N_1T_2^2 - N_1N_2T_3^2 + 2T_1T_2T_3,$$

$$B = N_2N_3 + N_3N_1 + N_1N_2 - T_1^2 - T_2^2 - T_3^2$$

$$C = N_1 + N_2 + N_3.$$

Всѣ три корня этого уравненія дѣйствительны, но они могутъ быть какъ поло...тельными, такъ и отрицательными; положительный корень выражаетъ натяженіе, ...рицательный — давленіе на соотвѣтственную площадку.

Эти три напряженія Γ_1, Γ_2, Γ_3 называются *главными напряженіями въ раз...сматриваемой точкѣ тѣла.*

Направленія нормалей n_1, n_2, n_3 къ тѣмъ взаимно перпендикулярнымъ площад...камъ, на которыя дѣйствуютъ главныя напряженія Γ_1, Γ_2, Γ_3, опредѣлятся изъ ра...венствъ (118) и изъ равенства $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$; если подставимъ въ равенство (118) ...рень Γ_1 вмѣсто $\pm F$, то найдемъ λ_1, μ_1, ν_1 — косинусы угловъ, составляемыхъ на...правленіемъ n_1 съ осями координатъ; подобнымъ же образомъ, подставивъ Γ_2 и Γ_3, ...йдемъ λ_2, μ_2, ν_2 и λ_3, μ_3, ν_3,—косинусы угловъ, составляемыхъ направленіями n_2, n_3. ...кія же напряженія дѣйствуютъ на площадки, нормали которыхъ прямо противопо...жны.

Если повернуть оси координатъ такимъ образомъ, чтобы новая ось X-овъ была ...раллельна нормали n_1, новая ось $У$-овъ — параллельна нормали n_2, то выраженія (14 *bis*) получатъ слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{aligned} F_n \cos(F_n, X) &= X_n = \Gamma_1\lambda \\ F_n \cos(F_n, У) &= У_n = \Gamma_2\mu \\ F_n \cos(F_n, Z) &= Z_n = \Gamma_3\nu \end{aligned}\right\}, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(120)}$$

...гдѣ

$$\lambda = \cos(n, n_1), \ \mu = \cos(n, n_2), \ \nu = \cos(n, n_3).$$

§ 29. Эллипсоидъ напряженій.

Рѣшивъ равенство (120) относительно λ, μ, ν, возвысивъ полученныя выраженія этихъ косинусовъ въ квадратъ и сложивъ, получимъ слѣдующее уравненіе:

$$\frac{X_n^2}{\Gamma_1^2} + \frac{Y_n^2}{\Gamma_2^2} + \frac{Z_n^2}{\Gamma_3^2} = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (121)$$

Это уравненіе выражаетъ, что если построимъ эллипсоидъ, центръ котораго расположимъ въ разсматриваемой точкѣ M тѣла, главныя оси направимъ по нормалямъ n_1, n_2, n_3 и дадимъ главнымъ полуосямъ его величины во столько разъ большія единицы длины, во сколько Γ_1, Γ_2, Γ_3 болѣе единицы напряженія, то радіусы векторы такого эллипсоида будутъ представлять величины и направленія напряженій, дѣйствующихъ на площадки, проведенныя черезъ эту точку. Каждый радіусъ векторъ этого эллипсоида изображаетъ величину и направленіе напряженія, дѣйствующаго на единицу площади нѣкоторой площадки, проведенной черезъ центръ M эллипсоида. Этотъ эллипсоидъ называется *эллипсоидомъ напряженій* разсматриваемой точки M тѣла.

Чтобы получить уравненіе эллипсоида напряженій при расположеніи осей координатъ не параллельно направленіямъ главныхъ напряженій, должно рѣшить уравненія (14 *bis*) относительно λ, μ, ν и полученныя выраженія подставить въ равенство: $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$.

§ 30. Поверхность направленій.

Если желаемъ знать, на какую именно площадку дѣйствуетъ напряженіе, имѣющее величину и направленіе выбраннаго нами радіуса вектора F_n эллипсоида напряженій, то должны будемъ обратиться къ равенствамъ (14 *bis*) или же къ равенствамъ (120); изъ послѣднихъ:

$$\cos(n, n_1) = \frac{X_n}{\Gamma_1},\ \cos(n, n_2) = \frac{Y_n}{\Gamma_2},\ \cos(n, n_3) = \frac{Z_n}{\Gamma_3}; \ldots (120, bis)$$

помноживъ первое изъ этихъ равенствъ на X_n, второе—на Y_n, третье—на Z_n и сложивъ, получимъ:

$$F_n \cos(F_n, n) = \frac{X_n^2}{\Gamma_1} + \frac{Y_n^2}{\Gamma_2} + \frac{Z_n^2}{\Gamma_3} \ldots\ldots\ldots\ldots (122)$$

Надо замѣтить, что проэкція напряженія F_n на нормаль n къ той площадкѣ, на которую оно дѣйствуетъ, можетъ быть для однѣхъ площадокъ положительною, а для другихъ отрицательною, т. е. уголъ (F_n, n) можетъ быть острымъ или тупымъ; напримѣръ, если всѣ три главныя напряженія Γ_1, Γ_2, Γ_3 отрицательныя, то для всякихъ направленій F_n уголъ (F_n, n) будетъ тупымъ, какъ видно изъ формулы (122), если же одно изъ главныхъ напряженій, напр. Γ_1, положительное, а два другія отрицательныя, то для нѣкоторыхъ направленій $F_n \cos(F_n, n)$ будетъ величина положительная, а для прочихъ — отрицательная.

Для тѣхъ направленій F_n, для которыхъ $\cos(F_n, n)$ есть величина положительная, назовемъ черезъ x, y, z слѣдующія отношенія:

$$x = \frac{X_n}{\sqrt{F_n \cos(F_n, n)}},\ y = \frac{Y_n}{\sqrt{F_n \cos(F_n, n)}},\ z = \frac{Z_n}{\sqrt{F_n \cos(F_n, n)}}; \ldots (123)$$

что будутъ проэкціи на направленія n_1, n_2, n_3 длины r, отложенной отъ M по направленію F_n; концы всѣхъ такихъ длинъ образуютъ собою поверхность втораго порядка, выражаемую уравненіемъ:

$$1 = \frac{x^2}{\Gamma_1} + \frac{y^2}{\Gamma_2} + \frac{z^2}{\Gamma_3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (124)$$

По подстановленіи въ равенство (121), вмѣсто X_n, Y_n, Z_n, ихъ выраженій въ x, y, z изъ (123) получимъ:

$$F_n \cos(F_n, n) = \frac{1}{\frac{x^2}{\Gamma_1^2} + \frac{y^2}{\Gamma_2^2} + \frac{z^2}{\Gamma_3^2}}$$

и поэтому первое изъ равенствъ (120, *bis*) можно преобразовать такъ:

$$\cos(n, n_1) = \frac{x}{\Gamma_1}\sqrt{F_n \cos(F_n, n)} = \frac{\frac{x}{\Gamma_1}}{\sqrt{\frac{x^2}{\Gamma_1^2} + \frac{y^2}{\Gamma_2^2} + \frac{z^2}{\Gamma_3^2}}}, \ldots (125, a)$$

т. е. $\cos(n, n_1)$ равенъ косинусу угла, составляемаго съ направленіемъ n_1 нормалью къ поверхности (124), проведенною изъ точки x, y, z, т. е. изъ конца r. Подобнымъ же образомъ окажется, что и $\cos(n, n_2)$, $\cos(n, n_3)$ равны косинусамъ угловъ, составляемыхъ тою же нормалью съ направленіями n_2, n_3.

Для тѣхъ направленій F_n, для которыхъ $\cos(F_n, n)$ есть величина отрицательная, назовемъ черезъ x, y, z отношенія:

$$x = \frac{X_n}{\sqrt{-F_n \cos(F_n, n)}},\ y = \frac{Y_n}{\sqrt{-F_n \cos(F_n, n)}},\ z = \frac{Z_n}{\sqrt{-F_n \cos(F_n, n)}}, \ldots (123, bis)$$

которыя будутъ выражать проэкціи на направленія n_1, n_2, n_3 длины r_1, направленной по F_n; концы всѣхъ длинъ r_1 образуютъ поверхность втораго порядка, выражаемую уравненіемъ:

$$-1 = \frac{x^2}{\Gamma_1} + \frac{y^2}{\Gamma_2} + \frac{z^2}{\Gamma_3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (124, bis)$$

По подстановленіи выраженій для X_n, Y_n, Z_n изъ равенствъ (123, *bis*) въ равенства (121) и (120, *bis*) найдемъ опять, что

$$\cos(n, n_1) = \frac{1}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial x},\ \cos(n, n_2) = \frac{1}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial y},\ \cos(n, n_3) = \frac{1}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial z},$$

гдѣ

$$\Delta f = +\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2},\ f = \frac{x^2}{\Gamma_1} + \frac{y^2}{\Gamma_2} + \frac{z^2}{\Gamma_3} + 1,$$

т. е. что направленіе n параллельно нормали, проведенной изъ конца радіуса вектора r_1 къ поверхности (124, *bis*).

Изъ этого видно, что съ помощію поверхности (124) или (124, *bis*) могутъ быть опредѣлены направленія нормалей къ тѣмъ площадкамъ, на которыя дѣйствуютъ на-

пряженія изображаемыя радіусами векторами эллипсоида упругости; поэтому поверхности эти называются *поверхностями направленій*.

Для большей опредѣлительности разсмотримъ порознь возможныя видоизмѣненія поверхностей направленій.

1) Всѣ три главныя напряженія положительны:

$$\Gamma_1 > \Gamma_2 > \Gamma_3 > 0.$$

Въ этихъ случаяхъ для всѣхъ направленій уголъ (F_n, n) острый. Поверхность направленій есть эллипсоидъ, полуоси котораго пропорціональны корнямъ квадратнымъ изъ главныхъ напряженій.

Пусть наружный эллипсоидъ на черт. 16 есть эллипсоидъ упругости, внутренній — поверхность направленій. Чтобы опредѣлить, на какую площадку дѣйствуетъ напряженіе MF, найдемъ точку K пересѣченія радіуса MF съ внутреннимъ эллипсоидомъ, проведемъ къ послѣднему въ точкѣ K касательную плоскость и черезъ M ей параллельную площадку; возстановимъ изъ M нормаль n, составляющую острый уголъ съ направленіемъ MF. Площадка, найденная такимъ образомъ, будетъ та, на которую будетъ дѣйствовать *натяженіе* MF, составляющее острый уголъ съ нормалью n.

Обратно, если требуется опредѣлить величину и направленіе напряженія, дѣйствующаго на единицу поверхности данной площадки, то надо провести касательную плоскость къ эллипсоиду направленій параллельную площадкѣ и притомъ съ той стороны, куда направлена нормаль n, затѣмъ надо провести радіусъ векторъ MF эллипсоида напряженій черезъ точку прикосновенія K касательной плоскости. Искомое напряженіе будетъ MF.

2) Когда всѣ три главныя напряженія отрицательны:

$$0 > \Gamma_1 > \Gamma_2 > \Gamma_3,$$

то для всѣхъ направленій n уголъ (F_n, n) тупой, такъ что на всѣ площадки дѣйствуютъ *давленія*. Поверхность направленій въ этихъ случаяхъ есть эллипсоидъ, выражаемый уравненіемъ:

$$\frac{x^2}{(-\Gamma_1)} + \frac{y^2}{(-\Gamma_2)} + \frac{z^2}{(-\Gamma_3)} = 1.$$

Построенія — тѣже самыя какъ и въ предыдущихъ случаяхъ, но нормали n составляютъ тупые углы съ направленіями F_n.

3) Одно изъ главныхъ напряженій, а именно Γ_3, отрицательное, два прочія положительныя $(\Gamma_1 > \Gamma_2 > 0)$.

Въ этомъ случаѣ поверхность (124) есть однополый гиперболоидъ съ дѣйствительными полуосями: $\sqrt{\Gamma_1}$, $\sqrt{\Gamma_2}$ и непересѣкающею полуосью: $\sqrt{-\Gamma_3}$; уравненіе его:

$$\frac{x^2}{\Gamma_1} + \frac{y^2}{\Gamma_2} - \frac{z^2}{(-\Gamma_3)} = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

Поверхность же (124 *bis*) есть гиперболоидъ о двухъ полахъ, уравненіе котораго:

$$\frac{z^2}{(-\Gamma_3)} - \frac{x^2}{\Gamma_1} - \frac{y^2}{\Gamma_2} = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (B)$$

Эти гиперболоиды имѣютъ общій ассимптотическій конусъ:

$$\frac{x^2}{\Gamma_1}+\frac{y^2}{\Gamma_2}=\frac{z^2}{(-\Gamma_3)}\dots\dots\dots\dots(C)$$

Чтобы опредѣлить площадку, на которую дѣйствуетъ напряженіе MF (черт. 17), надо найти точку K пересѣченія этого радіуса вектора MF съ поверхностью направленій, провести касательную плоскость къ поверхности въ точкѣ K и черезъ точку M площадку параллельную этой плоскости. Если точка K окажется на однополомъ гиперболоидѣ, то нормаль n будетъ составлять острый уголъ съ направленіемъ MF; если точка K окажется на гиперболоидѣ о двухъ полахъ, то нормаль n должна составлять тупой уголъ съ направленіемъ MF. Если же направленіе MF будетъ лежать въ ассимптотическомъ конусѣ, то площадка будетъ совпадать съ касательною плоскостью, проведенною къ конусу черезъ производящую MF и напряженіе, дѣйствующее на такую площадку, будетъ тангенціально къ ней и равно MF на единицу площади. По этой причинѣ ассимптотическій конусъ называется *конусомъ тангенціальныхъ напряженій*.

4) Если два главныя напряженія отрицательны, а третье положительно:

$$\Gamma_1>0>\Gamma_2>\Gamma_3,$$

то та часть поверхности направленій, которая опредѣляетъ направленія нормалей къ площадкамъ испытывающимъ натяженія, есть гиперболоидъ о двухъ полахъ:

$$\frac{x^2}{\Gamma_1}-\frac{y^2}{(-\Gamma_2)}-\frac{z^2}{(-\Gamma_3)}=1,\dots\dots\dots\dots(A)$$

та часть поверхности направленій, которая опредѣляетъ направленія площадокъ, испытывающихъ давленія, есть гиперболоидъ однополый:

$$\frac{y^2}{(-\Gamma_2)}+\frac{z^2}{(-\Gamma_3)}-\frac{x^2}{\Gamma_1}=1,\dots\dots\dots\dots(B)$$

наконецъ, площадки, испытывающія только тангенціальныя напряженія, касательны къ ассимптотическому конусу:

$$\frac{y^2}{(-\Gamma_2)}+\frac{z^2}{(-\Gamma_3)}=\frac{x^2}{\Gamma_1}\dots\dots\dots\dots(C)$$

§ 31. Случаи, въ которыхъ одно или два изъ главныхъ напряженій равны нулю.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда равно нулю одно изъ главныхъ напряженій, означимъ остальныя два напряженія черезъ Γ_1 и Γ_2 и возьмемъ новую ось X-овъ по направленію перпендикулярному къ площадкѣ испытывающей напряженіе Γ_1, а новую ось $У$-овъ по направленію перпендикулярному къ площадкѣ испытывающей напряженіе Γ_2.

Равенства (120) въ такихъ случаяхъ будутъ имѣть такой видъ:

$$\left.\begin{aligned}F_n\cos(F_n,n)&=X_n=\Gamma_1\lambda,\\F_n\cos(F_n,n)&=У_n=\Gamma_2\mu,\\F_n\cos(F_n,n)&=Z_n=0,\end{aligned}\right\},\dots\dots\dots\dots\textbf{(126)}$$

потому что $\Gamma_3 = 0$. Слѣдовательно напряженія, испытываемыя всякими площадками, направлены въ плоскости XY, площадки же, совпадающія съ этою плоскостью, неиспытываютъ напряженій вовсе.

Означимъ черезъ γ уголъ, составляемый направленіемъ нормали n съ осью Z-овъ, перпендикулярною къ направленіямъ главныхъ напряженій Γ_1 и Γ_2. Такъ какъ $\lambda^2 + \mu^2 = \sin^2\gamma$, то изъ равенствъ (126) можно получить слѣдующее уравненіе:

$$\frac{X_n^2}{\Gamma_1^2 \sin^2\gamma} + \frac{Y_n^2}{\Gamma_2^2 \sin^2\gamma} = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (127)$$

эллипса, радіусы векторы котораго представляютъ величины и направленія напряженій F_n, испытываемыхъ площадками, нормали которыхъ составляютъ уголъ γ съ осью Z-овъ. Для каждой величины угла γ есть свой эллипсъ, полуоси котораго равны $\Gamma_1 \sin\gamma$ и $\Gamma_2 \sin\gamma$; всѣ эллипсы подобны другъ другу и наибольшій, соотвѣтствующій углу $\gamma = \frac{\pi}{2}$, выражается уравненіемъ

$$\frac{X_n^2}{\Gamma_1^2} + \frac{Y_n^2}{\Gamma_2^2} = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (127, a)$$

Каждый такой эллипсъ есть *эллипсъ напряженій*.

Изъ равенствъ (126) составимъ выраженіе проэкціи напряженія F_n на нормаль n:

$$F_n \cos(F_n, n) = \frac{X_n^2}{\Gamma_1} + \frac{Y_n^2}{\Gamma_2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (128)$$

Изъ этого выраженія видно, что, если Γ_1 и Γ_2 положительны, то всякое напряженіе F_n составляетъ острый уголъ съ нормалью къ той площадкѣ, на которую оно дѣйствуетъ, если же оба они отрицательные, то для всякаго направленія n уголъ (F_n, n) — тупой; наконецъ, если Γ_1 и Γ_2 имѣютъ противоположные знаки, то для однихъ направленій n уголъ (F_n, n) острый, для другихъ — тупой.

Величины:

$$x = \frac{X_n}{\sqrt{\pm F_n \cos(F_n, n)}}, \quad y = \frac{Y_n}{\sqrt{\pm F_n \cos(F_n, n)}}, \ldots\ldots\ldots (129)$$

(гдѣ знакъ плюсъ долженъ быть взятъ для направленій n, при которыхъ $\cos(F_n, n)$ положительный), суть координаты концовъ радіусовъ векторовъ, направленныхъ вдоль по MF_n; концы этихъ радіусовъ векторовъ образуютъ собою кривую втораго порядка, которая есть эллипсъ:

$$\frac{x^2}{\Gamma_1} + \frac{y^2}{\Gamma_2} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{(-\Gamma_1)} + \frac{y^2}{(-\Gamma_2)} = 1,$$

если главныя напряженія имѣютъ одинаковые знаки; если же знаки ихъ противоположны, то кривая состоитъ изъ двухъ гиперболъ:

$$\frac{x^2}{\Gamma_1} - \frac{y^2}{(-\Gamma_2)} = 1 \ldots\ldots\ldots (A) \qquad \frac{y^2}{(-\Gamma_2)} - \frac{x^2}{\Gamma_1} = 1, \ldots\ldots\ldots (B)$$

имѣющихъ общія ассимптоты:

$$x = \pm y\sqrt{-\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (C)$$

Эти кривыя вмѣстѣ съ эллипсами напряженій могутъ служить для опредѣленія положеній площадокъ, испытывающихъ данныя напряженія и для опредѣленія напряженій, испытываемыхъ данными площадками; поэтому кривыя эти могутъ быть названы *кривыми направленій*.

Исключивъ изъ формулъ (126), (127) и (129) величины X_n и $У_n$, получимъ:

$$\pm F_n \cos(F_n, n) = \frac{1}{\sin^2\gamma}\left(\frac{x^2}{\Gamma_1^2} + \frac{y^2}{\Gamma_2^2}\right),$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \cos(n, X) = \frac{x}{\Gamma_1}\sqrt{\pm F_n \cos(F_n, n)} = \sin\gamma \cos(\mathfrak{N}, X), \\ \mu &= \cos(n, У) = \frac{y}{\Gamma_2}\sqrt{\pm F_n \cos(F_n, n)} = \sin\gamma \cos(\mathfrak{N}, У), \end{aligned}\right\} \ldots (130)$$

гдѣ $\mathfrak{N}$ есть направленіе нормали, возстановленной къ кривой направленій изъ той точки K ея, въ которой она пересѣкается радіусомъ векторомъ MF_n эллипса напряженій.

Изъ равенствъ (130) слѣдуетъ, что направленіе $\mathfrak{N}$ параллельно той линіи, по которой плоскость $XУ$ (главныхъ напряженій Γ_1, Γ_2) пересѣкается плоскостью, проведенною черезъ нормаль n и черезъ ось Z-овъ. Стало быть слѣдъ площадки на плоскости $XУ$ долженъ совпадать съ діаметромъ кривой положеній, сопряженнымъ съ тѣмъ діаметромъ, по которому направлено напряженіе MF_n, испытываемое площадкою.

Пусть плоскость бумаги на чертежѣ 18-мъ будетъ плоскостью главныхъ напряженій Γ_1, Γ_2 въ точкѣ M. Наружный эллипсъ пусть представляетъ эллипсъ напряженій (127, a); внутренній эллипсъ пусть будетъ кривою направленій (предполагая знаки напряженій Γ_1, Γ_2 одинаковыми). Чтобы опредѣлить положеніе площадки, испытывающей напряженіе MF_n, найдемъ точку K пересѣченія этого направленія съ эллипсомъ направленій, проведемъ въ этой точкѣ касательную къ нему и черезъ M прямую SS ей параллельную; эта прямая и будетъ слѣдомъ искомой площадки на плоскости $XУ$.

Нормаль къ площадкѣ будетъ конечно заключаться въ плоскости, проходящей черезъ ось Z-овъ и прямую $\mathfrak{N}$, она будетъ составлять съ $\mathfrak{N}$ уголъ острый, если Γ_1 и Γ_2 положительныя, въ противномъ же случаѣ — тупой; уголъ, составляемый нормалью съ осью Z-овъ опредѣлится тѣмъ, что синусъ его будетъ равенъ отношенію MF_n къ MF_n'. Конечно, найдутся двѣ такія площадки, одинаково наклоненныя къ прямой $\mathfrak{N}$ и составляющія взаимно дополнительные до π углы съ положительною осью Z-овъ, которыя испытываютъ одно и то же напряженіе MF_n.

Пусть изображенныя на чертежѣ 19-мъ гиперболы суть кривыя направленій при нѣкоторомъ положительномъ Γ_1 и отрицательномъ Γ_2, а изображенный здѣсь эллипсъ есть эллипсъ напряженій (127, a).

Въ этомъ случаѣ нормаль n будетъ составлять острый уголъ съ направленіемъ $\mathfrak{N}$ для тѣхъ направленій F_n, которыя пересѣкаютъ гиперболу (A), пересѣкающую ось X-овъ; если же направленіе F_n пересѣкаетъ гиперболу (B), какъ представлено на чертежѣ 20-мъ, то нормаль n будетъ составлять тупой уголъ съ направленіемъ $\mathfrak{N}$, такъ какъ она должна тогда составлять тупой уголъ съ направленіемъ напряженія MF_n, которое испытываетъ площадка.

На чертежѣ 21-мъ представленъ одинъ изъ тѣхъ случаевъ, въ которыхъ напряженіе MF находится на ассимптотѣ, тогда точка K находится на безконечности по направленію означенному оперенною стрѣлкою и сама ассимптота служитъ слѣдомъ площадки. Въ этомъ случаѣ нормаль n составляетъ съ направленіемъ $\mathfrak{N}$, изображеннымъ на чертежѣ, острый уголъ; это видно изъ слѣдующаго соображенія: пока точка K находится на гиперболѣ A, нормаль n составляетъ острый уголъ съ направленіемъ MK, а слѣдовательно и съ направленіемъ $\mathfrak{N}$, поэтому n должна будетъ составлять острый уголъ съ $\mathfrak{N}$ и тогда, когда точка K удалится по правой вѣтви гиперболы A въ безконечность по направленію неоперенной стрѣлки.

Если два главныя напряженія равны нулю и мы направимъ ось X-овъ по направленію Γ_1, неравному нулю, то формулы (120) дадутъ слѣдующее:

$$F_n \cos(F_n, X) = X_n = \Gamma_1 \cos(n, X),\ \ F_n \cos(F_n, Y) = 0,\ \ F_n \cos(F_n, Z) = 0;$$

это значитъ, что тогда на каждую площадку дѣйствуетъ напряженіе параллельно оси X-овъ равное проэкціи Γ_1 на нормаль; притомъ можно еще замѣтить, что

$$F_n \cos(F_n, n) = \Gamma_1 \cos^2(n, X).$$

VI.

Зависимость между напряженіями и деформаціями.

§ 32. Выраженія проэкцій напряженій въ видѣ суммъ, распространенныхъ на всѣ частицы, окружающія ту точку тѣла, черезъ которую проведена площадка.

Въ §§ 4-мъ, 5-мъ и 6-мъ было уже объяснено, что понимаютъ подъ именемъ проэкцій X_n, Y_n, Z_n на оси координатъ напряженія F_n, дѣйствующаго въ точкѣ M на единицу поверхности площадки ΔS, проведенной черезъ эту точку и имѣющей нормалью направленіе n.

Будемъ теперь составлять выраженіе для X_n.

Возьмемъ двѣ частицы вблизи площадки ΔS, одну μ со стороны положительной нормали n, другую m — со стороны противоположной; эти частицы должны быть изъ числа тѣхъ, которыя расположены относительно одна другой въ разстояніи не большемъ ρ радіуса сферы дѣйствія частичныхъ силъ, а относительно площадки онѣ должны быть расположены такъ, чтобы кратчайшее разстояніе между ними пересѣкало площадь или контуръ площадки.

Означимъ черезъ r величину разстоянія между m и μ и вмѣстѣ съ тѣмъ направленіе отъ m къ μ; такъ какъ частичная сила дѣйствія μ на m предполагается равною $m\mu\varphi(r)$, гдѣ $\varphi(r)$ *есть положительная величина въ томъ случаѣ, когда*

взаимнодѣйствіе между μ *и* m *есть отталкиваніе*, то проэкція на ось X-овъ частичнаго дѣйствія частицы μ на частицу m выразится величиною:

$$[-m\mu\varphi(r)\cos(r, X)].$$

Соберемъ теперь сумму проэкцій на ось X-овъ всѣхъ силъ, дѣйствующихъ сквозь площадку ΔS со стороны всѣхъ такихъ частицъ μ, на такія частицы m, разстоянія $m\mu$ между которыми имѣютъ одну и ту же величину r и параллельны между собою.

На чертежѣ 21-мъ представлено нѣсколько паръ такихъ частицъ, а именно: $m_1\mu_1$, $m_2\mu_2$, $m_3\mu_3$ и наконецъ $m_0\mu_0$, изъ этихъ частицъ одна: m_0 находится въ точкѣ M.

Всѣ такія частицы m, какъ m_0, m_1, m_2, ... и прочія, заполняютъ собою изображенный на чертежѣ цилиндръ, основаніе котораго есть площадка ΔS и боковая поверхность образуется длинами равными и параллельными длинѣ $M\mu_0$, т. е. r.

Сумма проэкцій на ось X-овъ частичныхъ дѣйствій со стороны всѣхъ частицъ μ_0, μ_1, μ_2, ... на всѣ частицы m_0, m_1, m_2, ... будетъ равна:

$$-(\Sigma m\mu)\,\varphi(r)\cos(r, X),$$

гдѣ знакъ суммы относится ко всѣмъ частицамъ m, заполняющимъ вышесказанный цилиндръ, и къ соотвѣтствующимъ имъ частицамъ μ.

Если бы массы всѣхъ частицъ μ были одинаковы, то μ можно было бы взять за знакъ суммы; но даже если массы μ, равно какъ и массы m, неодинаковы между собою, то все-таки можно въ вышеприведенной суммѣ произведеній $m\mu$ вынести за знакъ суммы нѣкоторое среднее значеніе изъ массъ всѣхъ частицъ, окружающихъ точку M; назовемъ эту среднюю величину массы частицы буквою $\mathfrak{m}$; тогда:

$$\Sigma m\mu = \mathfrak{m}\Sigma m,$$

гдѣ Σm выражаетъ массу вещества, заключающагося въ вышесказанномъ цилиндрѣ.

Означимъ черезъ σ среднюю плотность цилиндра, за которую примемъ плотность вещества въ точкѣ M; масса цилиндра равна σ помноженной на объемъ цилиндра, т. е. на $\Delta S . r\cos(r, n)$, такъ какъ величина высоты цилиндра равна проэкціи длины $\overline{M\mu_0}$ на направленіе n.

И такъ, составленная теперь сумма выразится слѣдующимъ образомъ:

$$-\mathfrak{m}\sigma\,\Delta S\,\varphi(r)\,r\cos(r, n)\cos(r, X) \ldots\ldots\ldots \textbf{(131)}$$

Далѣе, предполагая, что точка M находится на разстояніи не меньшемъ ρ отъ поверхности тѣла, должно суммировать выраженіе (131) по всякимъ величинамъ r, отъ $r=0$ до $r=\rho$, и по всякимъ направленіямъ r, составляющимъ съ n углы не больше прямаго.

Означимъ черезъ θ уголъ, составляемый направленіемъ r съ направленіемъ n и черезъ ψ уголъ, составляемый плоскостью, проведенною черезъ r и n, съ нѣкоторою основною плоскостью, тоже проведенною черезъ n.

При суммированіи по всѣмъ направленіямъ r, составляющимъ съ n углы не большіе прямаго, надо будетъ суммировать по всѣмъ θ, заключающимся въ предѣлахъ отъ $\theta = 0$ до $\theta = \frac{\pi}{2}$, и по всѣмъ ψ, отъ $\psi = 0$ до $\psi = 2\pi$.

Замѣтивъ же, что въ выраженіи (131) произведеніе $\cos(r, n) \cos(r, X)$ не измѣняетъ своей величины при перемѣнѣ направленія r въ направленіе противоположное, можемъ вмѣсто этого просуммировать по всѣмъ возможнымъ направленіямъ r (т. е. по θ отъ $\theta = 0$ до $\theta = \pi$ и по ψ отъ $\psi = 0$ до $\psi = 2\pi$) и взять половину полученной суммы.

Такимъ образомъ получится слѣдующее выраженіе для числителя перваго изъ отношеній (2) § 4-го:

$$\Sigma X = -\Delta S \frac{\sigma}{2} \mathfrak{S}\, \mathfrak{m}\varphi(r)\, r \cos(r, n) \cos(r, X),$$

гдѣ $\mathfrak{S}$ означаетъ суммированіе по всѣмъ r отъ 0 до ρ, по всѣмъ θ отъ 0 до π и по всѣмъ ψ отъ 0 до 2π; средняя масса $\mathfrak{m}$ оставлена подъ знакомъ суммы, такъ какъ величина ея можетъ быть различна по различнымъ направленіямъ и въ различныхъ разстояніяхъ отъ площадки.

Раздѣливъ полученное выраженіе ΣX на ΔS, получимъ слѣдующее выраженіе для X_n:

$$X_n = -\frac{\sigma}{2} \mathfrak{S}\, \mathfrak{m}\varphi(r)\, r \cos(r, n) \cos(r, X) \quad \ldots\ldots\ldots (\mathbf{132}, a)$$

и подобнымъ же образомъ составимъ выраженія для Y_n и Z_n:

$$Y_n = -\frac{\sigma}{2} \mathfrak{S}\, \mathfrak{m}\varphi(r)\, r \cos(r, n) \cos(r, Y) \quad \ldots\ldots\ldots (\mathbf{132}, b)$$

$$Z_n = -\frac{\sigma}{2} \mathfrak{S}\, \mathfrak{m}\varphi(r)\, r \cos(r, n) \cos(r, Z) \quad \ldots\ldots\ldots (\mathbf{132}, c)$$

Если дать n направленіе положительной оси X-овъ, положительной оси Y-овъ или положительной оси Z-овъ, то получимъ изъ этихъ формулъ слѣдующія выраженія для проэкцій напряженій, дѣйствующихъ въ точкѣ M на площадки, перпендикулярныя къ направленіямъ положительныхъ осей координатъ:

$$N_1 = -\frac{\sigma}{2} \mathfrak{S}\, \mathfrak{m}\varphi(r)\, r \cos^2(r, X), \quad \ldots\ldots\ldots (\mathbf{133}, a)$$

и подобныя же выраженія для N_2 и N_3, отличающіяся отъ (133, a) только тѣмъ, что въ нихъ входятъ квадраты косинусовъ угловъ, составляемыхъ направленіями r съ осями Y-овъ и Z-овъ, вмѣсто $\cos^2(rX)$.

Далѣе:

$$T_{yz} = T_1 = -\frac{\sigma}{2} \mathfrak{S}\, \mathfrak{m}\varphi(r)\, r \cos(r, Y) \cos(r, Z) \quad \ldots\ldots (\mathbf{134}, a)$$

и подобныя же выраженія для $T_{zx} = T_2$, $T_{xy} = T_3$, отличающіяся отъ (134, a) соотвѣтственною перестановкою буквъ: X, Y, Z.

Считаемъ необходимымъ обратить здѣсь вниманіе на слѣдующее обстоятельство:

При составленіи выраженій (133), (134) предполагалось, что всѣ точки площадки отстоятъ отъ поверхности тѣла на разстояніи не меньшемъ радіуса ρ сферы дѣйствія частичныхъ силъ, а потому составленныя формулы выражаютъ проэкціи напряженій только въ такихъ точкахъ внутри тѣла, которыя отстоятъ отъ поверхности на разстояніи не меньшемъ величины ρ.

§ 33. Состояніе упругаго тѣла до деформированія. Предварительныя напряженія.

Мы будемъ предполагать, что физически-твердое тѣло до наступленія деформацій не было подвержено никакимъ внѣшнимъ силамъ и напряженіямъ и находилось, либо въ покоѣ, либо въ поступательномъ движеніи по инерціи; такое состояніе физически-твердаго тѣла я буду называть *предварительнымъ состояніемъ.*

Отнесемъ тѣло къ осямъ координатъ X, Y, Z, — неподвижнымъ, если предварительное состояніе тѣла есть состояніе покоя, и поступательно-движущимся вмѣстѣ съ центромъ тяжести тѣла, если предварительное состояніе его есть поступательное движеніе по инерціи. Пусть x, y, z суть координаты предварительныхъ положеній точекъ тѣла относительно этихъ осей.

Пока тѣло находится въ предварительномъ состояніи и ни температура, ни строеніе его неизмѣняются, величины напряженій N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 остаются неизмѣнными въ каждой точкѣ тѣла; для отличія этихъ напряженій отъ тѣхъ, которыя являются при деформированномъ состояніи тѣла, я буду ихъ называть *предварительными напряженіями* и буду обозначать такъ: N_1^0, N_2^0, N_3^0, T_1^0, T_2^0, T_3^0.

Величины предварительныхъ напряженій въ точкахъ твердаго тѣла, не находящихся въ поверхностномъ слоѣ, могутъ быть выражены формулами (133) и (134); однако, пока мы не знаемъ вида функціи $\varphi(r)$ и не составили себѣ никакого представленія о распредѣленіи частицъ тѣла, эти формулы не могутъ служить для вычисленія величинъ предварительныхъ напряженій въ различныхъ точкахъ тѣла. Эти формулы (133) и (134) составлены и приведены здѣсь для другой цѣли, какъ будетъ видно въ слѣдующемъ параграфѣ.

Для величинъ предварительныхъ напряженій въ точкахъ поверхностнаго слоя, т. е. въ такихъ, которыя отстоятъ отъ поверхности тѣла менѣе чѣмъ на ρ (величину радіуса сферы дѣйствія частичныхъ силъ), мы не имѣемъ даже и такихъ выраженій, какъ (133) и (134).

Во всякомъ случаѣ изъ уравненій (17) § 11-го слѣдуетъ, что предварительныя напряженія должны быть такими функціями отъ x, y, z, которыя удовлетворяли бы дифференціальнымъ уравненіямъ:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial N_1^0}{\partial x} + \frac{\partial T_3^0}{\partial y} + \frac{\partial T_2^0}{\partial z} &= 0, \\
\frac{\partial T_3^0}{\partial x} + \frac{\partial N_2^0}{\partial y} + \frac{\partial T_1^0}{\partial z} &= 0, \\
\frac{\partial T_2^0}{\partial x} + \frac{\partial T_1^0}{\partial y} + \frac{\partial N_3^0}{\partial z} &= 0
\end{aligned}\right\}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(135)}$$

величины же проэкцій предварительныхъ напряженій X_n^0, Y_n^0, Z_n^0 на какую либо площадку, проведенную черезъ одну изъ такихъ точекъ тѣла, выражаются по формуламъ (14 *bis*) § 28-го въ величинахъ предварительныхъ напряженій N_1^0, N_2^0, N_3^0, T_1^0, T_2^0, T_3^0 для той же точки, такъ что:

$$\left.\begin{aligned} X_n^0 &= N_1^0 \cos(n, X) + T_3^0 \cos(n, Y) + T_2^0 \cos(n, Z) \\ Y_n^0 &= T_3^0 \cos(n, X) + N_2^0 \cos(n, Y) + T_1^0 \cos(n, Z) \\ Z_n^0 &= T_2^0 \cos(n, X) + T_1^0 \cos(n, Y) + N_3^0 \cos(n, Z) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (136)$$

§ 34. Выраженія напряженій въ деформированномъ состояніи твердаго тѣла при предположеніи, что относительныя перемѣщенія сосѣднихъ точекъ тѣла ничтожно-малы сравнительно съ ихъ предварительными взаимными разстояніями.

Твердое тѣло, находившееся въ *предварительномъ состояніи*, при дѣйствіи внѣшнихъ напряженій или внѣшнихъ объемныхъ силъ деформируется, такъ что первоначальныя координаты x, y, z точекъ его получаютъ приращенія u, v, w, которыя суть нѣкоторыя функціи первоначальныхъ координатъ x, y, z.

Пока тѣло деформируется, приращенія координатъ u, v, w суть не только функціи первоначальныхъ координатъ, но и еще явныя функціи времени t.

Относительно величинъ u, v, w мы можемъ предположить, что это суть *сплошныя функціи координатъ x, y, z для одного и того же тѣла*, потому что если u, v, w претерпѣваютъ разрывъ сплошности на какой либо поверхности, проведенной внутри тѣла и раздѣляющей его на двѣ части, то мы вправѣ разсматривать эти двѣ части, какъ два разныя тѣла.

Пусть M и M_1 суть двѣ весьма близкія одна къ другой точки тѣла; предварительныя координаты первой: x, y, z, второй: $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$. Въ деформированномъ состояніи координаты положенія M', занимаемаго первою точкою, будутъ: $x + u$, $y + v$, $z + w$, координаты же положенія M_1', занимаемаго въ тотъ же моментъ второю точкою, будутъ: $x + \Delta x + u + \Delta u$, $y + \Delta y + v + \Delta v$, $z + \Delta z + w + \Delta w$.

Такъ какъ u, v, w суть сплошныя функціи координатъ x, y, z, то Δu, Δv, Δw могутъ быть выражены въ видѣ рядовъ, расположенныхъ по возрастающимъ степенямъ величинъ Δx, Δy, Δz:

$$\left.\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial u}{\partial x}\mathfrak{x} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathfrak{y} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathfrak{z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathfrak{x}^2 + \ldots\ldots \\ \Delta v &= \frac{\partial v}{\partial x}\mathfrak{x} + \frac{\partial v}{\partial y}\mathfrak{y} + \frac{\partial v}{\partial z}\mathfrak{z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\mathfrak{x}^2 + \ldots\ldots \\ \Delta w &= \frac{\partial w}{\partial x}\mathfrak{x} + \frac{\partial w}{\partial y}\mathfrak{y} + \frac{\partial w}{\partial z}\mathfrak{z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\mathfrak{x}^2 + \ldots\ldots \end{aligned}\right\}; \ldots\ldots (137)$$

здѣсь и въ дальнѣйшихъ формулахъ величины Δx, Δy, Δz обозначены буквами $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$.

Вслѣдствіе деформаціи взаимное расположеніе точекъ тѣла измѣняется, а потому измѣняются и всѣ величины, входящія въ составъ выраженій (133) и (134), а именно:

	Въ предварительномъ состояніи были:	Въ деформированномъ состояніи будутъ:
Разстояніе точки M отъ которой либо изъ сосѣднихъ точекъ M_1 .	$r = MM_1$ $(r^2 = \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2)$	$\mathfrak{r} = M'M_1'$ $(\mathfrak{r}^2 = (\mathfrak{x} + \Delta u)^2 + (\mathfrak{y} + \Delta v)^2 + (\mathfrak{z} + \Delta w)^2)$
Косинусы угловъ съ осями координатъ	$\cos(r, X) = \frac{\mathfrak{x}}{r}$ $\cos(r, Y) = \frac{\mathfrak{y}}{r}$ $\cos(r, Z) = \frac{\mathfrak{z}}{r}$	$\cos(\mathfrak{r}, X) = \frac{\mathfrak{x} + \Delta u}{\mathfrak{r}}$ $\cos(\mathfrak{r}, Y) = \frac{\mathfrak{y} + \Delta v}{\mathfrak{r}}$ $\cos(\mathfrak{r}, Z) = \frac{\mathfrak{z} + \Delta w}{\mathfrak{r}}$
Плотность вещества въ ближайшемъ сосѣдствѣ съ точкою M .	σ	$\sigma_1 = \frac{\sigma}{1 + \theta}$

Здѣсь θ означаетъ кубическое расширеніе въ точкѣ M, разсчитанное на единицу объема. Что плотность уменьшается въ отношеніи единицы къ $(1 + \theta)$ видно изъ слѣдующаго. Пусть V и V_1 суть объемы одного и того же элемента тѣла въ предварительномъ и деформированномъ состояніи, а σ и σ_1 — плотности вещества элемента въ этихъ состояніяхъ; такъ какъ $V\sigma = V_1\sigma_1$ и $V_1 = V(1 + \theta)$, то $\sigma = \sigma_1(1 + \theta)$.

Составленныя по формуламъ (133) и (134) величины предварительныхъ напряженій въ точкѣ $M(x, y, z)$ выразятся теперь такъ:

$$\left.\begin{aligned} N_1^0 &= \frac{\sigma}{2} \mathsf{S}\, m \frac{\varphi(r)}{r} \mathfrak{x}^2, & T_1^0 &= \frac{\sigma}{2} \mathsf{S}\, m \frac{\varphi(r)}{r} \mathfrak{y}\mathfrak{z} \\ N_2^0 &= \frac{\sigma}{2} \mathsf{S}\, m \frac{\varphi(r)}{r} \mathfrak{y}^2, & T_2^0 &= \frac{\sigma}{2} \mathsf{S}\, m \frac{\varphi(r)}{r} \mathfrak{z}\mathfrak{x} \\ N_3^0 &= \frac{\sigma}{2} \mathsf{S}\, m \frac{\varphi(r)}{r} \mathfrak{z}^2, & T_3^0 &= \frac{\sigma}{2} \mathsf{S}\, m \frac{\varphi(r)}{r} \mathfrak{x}\mathfrak{y} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (138)$$

Величины же напряженій въ точкѣ $M'(x + u, y + v, z + w)$ въ деформированномъ состояніи тѣла выразятся такъ:

$$N_1 = \frac{\sigma}{2(1 + \theta)} \mathsf{S}\, m \frac{\varphi(\mathfrak{r})}{\mathfrak{r}} (\mathfrak{x} + \Delta u)^2 \ldots\ldots \quad (139, a)$$

$$N_2 = \frac{\sigma}{2(1 + \theta)} \mathsf{S}\, m \frac{\varphi(\mathfrak{r})}{\mathfrak{r}} (\mathfrak{y} + \Delta v)^2 \ldots\ldots \quad (139, b)$$

$$N_3 = \frac{\sigma}{2(1 + \theta)} \mathsf{S}\, m \frac{\varphi(\mathfrak{r})}{\mathfrak{r}} (\mathfrak{z} + \Delta w)^2 \ldots\ldots \quad (139, c)$$

$$T_1 = \frac{\sigma}{2(1 + \theta)} \mathsf{S}\, m \frac{\varphi(\mathfrak{r})}{\mathfrak{r}} (\mathfrak{y} + \Delta v)(\mathfrak{z} + \Delta w) \ldots\ldots \quad (139, d)$$

$$T_2 = \frac{\sigma}{2(1 + \theta)} \mathsf{S}\, m \frac{\varphi(\mathfrak{r})}{\mathfrak{r}} (\mathfrak{z} + \Delta w)(\mathfrak{x} + \Delta u) \ldots\ldots \quad (139, e)$$

$$T_3 = \frac{\sigma}{2(1 + \theta)} \mathsf{S}\, m \frac{\varphi(\mathfrak{r})}{\mathfrak{r}} (\mathfrak{x} + \Delta u)(\mathfrak{y} + \Delta v) \ldots\ldots \quad (139, f)$$

Въ дальнѣйшихъ разсужденіяхъ мы ограничимся разсмотрѣніемъ только такихъ деформацій твердыхъ тѣлъ, при которыхъ относительныя перемѣщенія каждыхъ двухъ сосѣднихъ между собою точекъ тѣла настолько ничтожно-малы сравнительно съ ихъ предварительнымъ разстояніемъ, что возможно, при составленіи выраженій для N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3, пренебречь квадратами отношеній сказанныхъ перемѣщеній къ предварительнымъ разстояніямъ.

Подъ сосѣдними между собою точками тѣла мы здѣсь подразумѣваемъ такія, сферы взаимнодѣйствія которыхъ пересѣкаются.

Подъ относительнымъ перемѣщеніемъ точки M_1 относительно точки M мы здѣсь подразумѣваемъ геометрическую разность между разстояніемъ $M'M_1'$ въ деформированномъ состояніи и между ихъ предварительнымъ разстояніемъ MM_1; слѣдовательно проэкція на ось X-овъ относительнаго перемѣщенія точки M_1 относительно точки M равна:

$$\mathfrak{r} \cos (\mathfrak{r}, X) - r \cos (r, X) = \mathfrak{x} + \Delta u - \mathfrak{x} = \Delta u$$

и проэкціи этого перемѣщенія на оси Y-овъ и Z-овъ равны Δv, Δw.

Изъ равенства:

$$\frac{\Delta u}{r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathfrak{x}}{r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathfrak{y}}{r} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\mathfrak{z}}{r} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathfrak{x}\frac{\mathfrak{x}}{r} + \ldots$$

видно, что для того, чтобы отношеніе $(\Delta u : r)$ было ничтожно-малою величиною при всякихъ направленіяхъ r, необходимо, чтобы были ничтожно-малы производныя $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ и произведенія $\mathfrak{x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots\ldots \mathfrak{x}^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \ldots\ldots$, а для того, чтобы отношеніе это было ничтожно-мало для всякихъ r, необходимо, чтобы всѣ производныя были ничтожно-малы.

Для того, чтобы можно было пренебрегать квадратами и высшими степенями отношеній $(\Delta u : r)$, $(\Delta v : r)$, $(\Delta w : r)$ сравнительно съ ихъ первыми степенями, необходимо, чтобы всѣ частныя производныя отъ u, v, w по x, y, z были настолько малы, чтобы можно было пренебрегать ихъ квадратами и произведеніями сравнительно съ ихъ первыми степенями.

Поэтому, сдѣланное нами ограниченіе относительно деформацій можно выразить такъ:

Мы будемъ разсматривать только такія деформаціи твердыхъ тѣлъ, при которыхъ производныя

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial z}$$

и прочія производныя высшихъ порядковъ настолько малы, что при составленіи выраженій для напряженій можно пренебречь вторыми и высшими степенями этихъ производныхъ.

Если разсматривать относительныя деформаціи, происходящія въ ближайшемъ сосѣдствѣ съ какою либо точкою M тѣла, а именно внутри сферы дѣйствія частичныхъ силъ, описанной вокругъ центра M, то, по малости величинъ $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, можно въ выраженіяхъ (137) отбросить всѣ члены, заключающіе квадраты и высшія степени

этихъ величинъ; тогда относительная деформація внутри сказанной сферы выразится такъ:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{x} + \Delta u &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathfrak{x} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathfrak{y} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathfrak{z} \\ \mathfrak{y} + \Delta v &= \frac{\partial v}{\partial x}\mathfrak{x} + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathfrak{y} + \frac{\partial v}{\partial z}\mathfrak{z} \\ \mathfrak{z} + \Delta w &= \frac{\partial w}{\partial x}\mathfrak{x} + \frac{\partial w}{\partial y}\mathfrak{y} + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\mathfrak{z} \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots \mathbf{(140)}$$

При той степени малости производныхъ, при которой можно пренебрегать ихъ квадратами сравнительно съ первыми степенями, эти равенства (140) выражаютъ однородную ничтожно-малую деформацію (§ 27); поэтому сдѣланное нами ограниченіе можно формулировать еще слѣдующимъ образомъ:

Мы будемъ разсматривать только такія деформаціи физически-твердыхъ тѣлъ, при которыхъ вокругъ каждой точки тѣла, въ сферѣ дѣйствія частичныхъ силъ исходящихъ изъ нея, совершаются относительныя деформаціи однородныя и ничтожно-малыя.

Принимая во вниманіе сказанное въ § 27-мъ относительно значенія коэфиціентовъ ничтожно-малыхъ однородныхъ деформацій, мы заключимъ, что частныя производныя отъ u по x, отъ v по y, отъ w по z имѣютъ значенія линейныхъ растяженій длинъ, проведенныхъ черезъ точку M (x, y, z) параллельно осямъ координатъ, т. е.:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_2, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_3, \dots\dots\dots\dots \mathbf{(141)}$$

что кубическое расширеніе (на единицу объема) въ точкѣ M выражается суммою:

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \dots\dots\dots\dots \mathbf{(142)}$$

что величины двойныхъ сдвиговъ въ плоскостяхъ, проведенныхъ черезъ точку M параллельно плоскостямъ координатъ выражаются суммами:

$$2g_1 = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad 2g_2 = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad 2g_3 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \dots\dots \mathbf{(143)}$$

и что проэкціи на оси координатъ угловаго перемѣщенія вещества, окружающаго точку M, выражаются слѣдующими полуразностями:

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad \omega_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \omega_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \dots \mathbf{(144)}$$

Обращаясь теперь къ преобразованію вторыхъ частей выраженій (139), причемъ мы будемъ пренебрегать вторыми и высшими степенями первыхъ частныхъ производныхъ и всякими степенями частныхъ производныхъ втораго и высшихъ порядковъ отъ u, v, w по x, y, z, сдѣлаемъ слѣдующія подготовительныя замѣчанія.

1) При сказанномъ приближеніи можно замѣнить отношеніе $1:(1+\theta)$ разностью $(1-\theta)$, т. е.:

$$1-\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial z}, \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(145)}$$

а въ тѣхъ членахъ, въ которыхъ это отношеніе будетъ помножено на одну изъ частныхъ производныхъ отъ u, v, w по x, y, z, оно можетъ быть замѣнено единицею.

2) Нижеслѣдующіе квадраты могутъ быть замѣнены слѣдующими суммами:

$$\left.\begin{aligned}
(\mathfrak{x}+\Delta u)^2 &= \mathfrak{x}^2\left(1+2\frac{\partial u}{\partial x}\right)+2\,\mathfrak{x}\mathfrak{y}\frac{\partial u}{\partial y}+2\,\mathfrak{x}\mathfrak{z}\frac{\partial u}{\partial z}\\
(\mathfrak{y}+\Delta v)^2 &= 2\,\mathfrak{y}\mathfrak{x}\frac{\partial v}{\partial x}+\mathfrak{y}^2\left(1+2\frac{\partial v}{\partial y}\right)+2\,\mathfrak{y}\mathfrak{z}\frac{\partial v}{\partial z}\\
(\mathfrak{z}+\Delta w)^2 &= 2\,\mathfrak{z}\mathfrak{x}\frac{\partial w}{\partial x}+2\,\mathfrak{z}\mathfrak{y}\frac{\partial w}{\partial y}+\mathfrak{z}^2\left(1+2\frac{\partial w}{\partial z}\right)
\end{aligned}\right\}, \ldots\ldots \textbf{(146)}$$

а въ тѣхъ членахъ, гдѣ эти квадраты окажутся помноженными на одну изъ производныхъ отъ u, v, w по x, y, z, можно замѣнить ихъ квадратами: $\mathfrak{x}^2$, $\mathfrak{y}^2$, $\mathfrak{z}^2$.

3) Нижеслѣдующія произведенія могутъ быть замѣнены слѣдующими суммами:

$$(\mathfrak{y}+\Delta v)(\mathfrak{z}+\Delta w)=\mathfrak{y}^2\frac{\partial w}{\partial y}+\mathfrak{z}^2\frac{\partial v}{\partial z}+\mathfrak{y}\mathfrak{z}\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\mathfrak{z}\mathfrak{x}\frac{\partial v}{\partial x}+\mathfrak{x}\mathfrak{y}\frac{\partial w}{\partial x}\ldots \textbf{(147, }a\textbf{)}$$

$$(\mathfrak{z}+\Delta w)(\mathfrak{x}+\Delta u)=\mathfrak{x}^2\frac{\partial w}{\partial x}+\mathfrak{z}^2\frac{\partial u}{\partial z}+\mathfrak{y}\mathfrak{z}\frac{\partial u}{\partial y}+\mathfrak{z}\mathfrak{x}\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\mathfrak{x}\mathfrak{y}\frac{\partial w}{\partial y}\ldots \textbf{(147, }b\textbf{)}$$

$$(\mathfrak{x}+\Delta u)(\mathfrak{y}+\Delta v)=\mathfrak{x}^2\frac{\partial v}{\partial x}+\mathfrak{y}^2\frac{\partial u}{\partial y}+\mathfrak{y}\mathfrak{z}\frac{\partial u}{\partial z}+\mathfrak{z}\mathfrak{x}\frac{\partial v}{\partial z}+\mathfrak{x}\mathfrak{y}\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right),\ldots \textbf{(147, }c\textbf{)}$$

а въ тѣхъ членахъ, гдѣ произведенія эти окажутся помноженными на частныя производныя, можно ихъ замѣнить произведеніями: $\mathfrak{y}\mathfrak{z}$, $\mathfrak{z}\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$.

4) Такъ какъ:

$$\mathfrak{r}=\sqrt{r^2+2(\mathfrak{x}\Delta u+\mathfrak{y}\Delta v+\mathfrak{z}\Delta w)+(\Delta u)^2+(\Delta v)^2+(\Delta w)^2},$$

то, развертывая по восходящимъ степенямъ отношеній: $(\Delta u:r)$, $(\Delta v:r)$, $(\Delta w:r)$, и пренебрегая третьими и высшими степенями этихъ отношеній, найдемъ слѣдующее приближенное выраженіе для разности $(\mathfrak{r}-r)$:

$$\mathfrak{r}-r=\frac{\alpha}{r}+\frac{1}{2}\left(\frac{\varkappa^2}{r}-\frac{\alpha^2}{r^3}\right), \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(148)}$$

гдѣ:

$$\varkappa^2=(\Delta u)^2+(\Delta v)^2+(\Delta w)^2\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(149)}$$

$$\alpha=\mathfrak{x}\Delta u+\mathfrak{y}\Delta v+\mathfrak{z}\Delta w=\varepsilon_1\mathfrak{x}^2+\varepsilon_2\mathfrak{y}^2+\varepsilon_3\mathfrak{z}^2+2g_1\mathfrak{y}\mathfrak{z}+2g_2\mathfrak{z}\mathfrak{x}+2g_3\mathfrak{x}\mathfrak{y}.\textbf{(150)}$$

5) Частное $(\varphi(\mathfrak{r}):\mathfrak{r})$ можно разложить въ рядъ по восходящимъ степенямъ разности $(\mathfrak{r}-r)$; пренебрегая вторыми и высшими степенями ея, будемъ имѣть:

$$\frac{\varphi(\mathfrak{r})}{\mathfrak{r}} = \frac{\varphi(r)}{r} + \frac{d\left(\frac{\varphi(r)}{r}\right)}{dr}(\mathfrak{r} - r),$$

$$\frac{\varphi(\mathfrak{r})}{\mathfrak{r}} = \frac{\varphi(r)}{r} + \psi(r)\,\alpha; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(151)}$$

гдѣ $\psi(r)$ есть сокращенное обозначеніе слѣдующей функціи отъ r:

$$\psi(r) = \frac{1}{r}\frac{d\left(\frac{\varphi(r)}{r}\right)}{dr} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(152)}$$

6) Такъ какъ α есть линейное выраженіе относительно частныхъ производныхъ отъ u, v, w (см. 150), то въ тѣхъ членахъ, которые будутъ заключать $\psi(r)$, можно замѣнить $(1+\theta)$ — единицею, а вмѣсто $(\mathfrak{x}+\Delta u)$, $(\mathfrak{y}+\Delta v)$, $(\mathfrak{z}+\Delta w)$ подставить просто $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$.

Послѣ всѣхъ этихъ приготовленій нетрудно будетъ убѣдиться, что выраженія (139) при сказанномъ приближеніи получатъ слѣдующій видъ:

$$N_1 = N_1^0(1+\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3) + 2T_3^0\frac{\partial u}{\partial y} + 2T_2^0\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial\varepsilon_1} \ldots \quad \textbf{(153, a)}$$

$$N_2 = 2T_3^0\frac{\partial v}{\partial x} + N_2^0(1+\varepsilon_2-\varepsilon_1-\varepsilon_3) + 2T_1^0\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial\varepsilon_2} \ldots \quad \textbf{(153, b)}$$

$$N_3 = 2T_2^0\frac{\partial w}{\partial x} + 2T_1^0\frac{\partial w}{\partial y} + N_3^0(1+\varepsilon_3-\varepsilon_1-\varepsilon_2) + \frac{\partial W}{\partial\varepsilon_3} \ldots \quad \textbf{(153, c)}$$

$$T_1 = N_2^0\frac{\partial w}{\partial y} + N_3^0\frac{\partial v}{\partial z} + T_1^0(1-\varepsilon_1) + T_2^0\frac{\partial v}{\partial x} + T_3^0\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial(2g_1)} \,.\, \textbf{(153, d)}$$

$$T_2 = N_1^0\frac{\partial w}{\partial x} + N_3^0\frac{\partial u}{\partial z} + T_1^0\frac{\partial u}{\partial y} + T_2^0(1-\varepsilon_2) + T_3^0\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial(2g_2)} \,.\, \textbf{(153, e)}$$

$$T_3 = N_1^0\frac{\partial v}{\partial x} + N_2^0\frac{\partial u}{\partial y} + T_1^0\frac{\partial u}{\partial z} + T_2^0\frac{\partial v}{\partial z} + T_3^0(1-\varepsilon_3) + \frac{\partial W}{\partial(2g_3)} \,.\, \textbf{(153, f)}$$

гдѣ W означаетъ слѣдующую однородную функцію второй степени отъ ε_1, ε_2, ε_3, g_1, g_2, g_3:

$$\left.\begin{aligned} 2W = \; & A_1\varepsilon_1^2 + 2B_1(\varepsilon_2\varepsilon_3 + 2g_1^2) + 2(211)(2g_1\varepsilon_1 + 4g_2g_3) + \\ & + A_2\varepsilon_2^2 + 2B_2(\varepsilon_3\varepsilon_1 + 2g_2^2) + 2(121)(2g_2\varepsilon_2 + 4g_3g_1) + \\ & + A_3\varepsilon_3^2 + 2B_3(\varepsilon_1\varepsilon_2 + 2g_3^2) + 2(112)(2g_3\varepsilon_3 + 4g_1g_2) + \\ & + 4(301)\varepsilon_1g_2 + 4(130)\varepsilon_2g_3 + 4(013)\varepsilon_3g_1 + \\ & + 4(310)\varepsilon_1g_3 + 4(031)\varepsilon_2g_1 + 4(103)\varepsilon_3g_2 \end{aligned}\right\} \ldots \textbf{(154)}$$

Коэфиціенты въ этомъ многочленѣ W могутъ быть выражены суммами вида:

$$-\frac{\sigma}{2}\,\mathrm{S}\,m\,\frac{d\left(\frac{\varphi(r)}{r}\right)}{r\,dr}\,\mathfrak{x}^a\mathfrak{y}^b\mathfrak{z}^c, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(155)}$$

а именно: если здѣсь сдѣлать $a = 4$, $b = 0$, $c = 0$, то эта сумма выразитъ коэфиціентъ A_1, если же сдѣлать $a = 0$, $b = 2$, $c = 2$, то получится выраженіе коэфиціента B_1, и т. д., какъ видно изъ слѣдующей таблицы:

Коэфиціенты.	a	b	c
A_1	4	0	0
A_2	0	4	0
A_3	0	0	4
B_1	0	2	2
B_2	2	0	2
B_3	2	2	0
(211)	2	1	1
(121)	1	2	1
(112)	1	1	2
(301)	3	0	1
(310)	3	1	0
(130)	1	3	0
(031)	0	3	1
(013)	0	1	3
(103)	1	0	3

§ 35. Начало д'Аламбера въ примѣненіи къ сплошному деформируемому тѣлу. Другой пріемъ вывода выраженій (153).

Для вывода выраженій (153) можно еще воспользоваться другимъ пріемомъ, основаннымъ на примѣненіи начала д'Аламбера къ сплошному деформируемому тѣлу.

Примѣняя начало д'Аламбера къ системѣ матерьяльныхъ точекъ, мы выражаемъ его слѣдующимъ равенствомъ:

$$\Sigma [X_i - m_i x_i'') \delta x_i + (Y_i - m_i y_i'') \delta y_i + (Z_i - m_i z_i'') \delta z_i] = 0, \ldots (156)$$

въ которомъ суммированіе распространено по всѣмъ точкамъ системы.

Примѣняя теперь начало д'Аламбера къ деформируемому тѣлу и, имѣя въ виду вывести изъ него дифференціальныя уравненія (17) и выраженія напряженій (153), мы должны будемъ надлежащимъ образомъ преобразовать равенство (156), примѣненное къ сплошному тѣлу, и ввести, вмѣсто силъ, приложенныхъ къ матерьяльнымъ точкамъ, — объемныя силы и напряженія, а вмѣсто суммированія, — интегрированія по объему и по поверхностямъ.

Подразумѣвая, какъ въ предыдущихъ параграфахъ, подъ x, y, z координаты точекъ тѣла въ его предварительномъ состояніи и подъ $x + u$, $y + v$, $z + w$ координаты тѣхъ же точекъ въ деформированномъ состояніи, должны будемъ подставить:

$$\frac{d^2u}{dt^2}, \quad \frac{d^2v}{dt^2}, \quad \frac{d^2w}{dt^2}$$

вмѣсто проэкцій ускореній точекъ тѣла и δu, δv, δw — вмѣсто варьяцій координатъ точекъ.

Предположивъ, что все тѣло раздѣлено на безконечно-малые элементы объема и замѣнивъ каждый такой элементъ матерьяльною точкою, должны будемъ выразить возможный моментъ силъ объемныхъ и силъ инерціи слѣдующимъ интеграломъ:

$$\iiint\left[\left(\mathfrak{X}-\frac{d^2u}{dt^2}\right)\delta u+\left(\mathfrak{Y}-\frac{d^2v}{dt^2}\right)\delta v+\left(\mathfrak{Z}-\frac{d^2w}{dt^2}\right)\delta w\right]\sigma_1 dO, \ldots .(157)$$

гдѣ интегралъ распространенъ по всему объему тѣла въ его деформированномъ состояніи и σ_1 есть плотность вещества въ этомъ состояніи.

Возможный моментъ внѣшнихъ напряженій, приложенныхъ къ наружной деформированной поверхности тѣла, выразится интеграломъ:

$$\iint(X_s\delta u_s+Y_s\delta v_s+Z_s\delta w_s)\,dS, \ldots\ldots\ldots\ldots .(158)$$

распространеннымъ по этой поверхности; здѣсь u_s, v_s, w_s, относятся къ одной изъ точекъ элемента dS поверхности, а X_s, Y_s, Z_s суть проэкціи на оси координатъ внѣшняго напряженія, дѣйствующаго въ этой точкѣ.

Далѣе, такъ какъ частичныя силы, дѣйствующія между каждыми двумя атомами или частицами тѣла, суть силы, имѣющія потенціалъ, то возможный моментъ всѣхъ частичныхъ силъ тѣла можетъ быть выраженъ варьяціею потенціала П всей системы частицъ на себя:

$$\Pi=\frac{1}{2}\sum mV,$$

гдѣ mV есть потенціалъ всей системы на одну изъ частицъ (масса которой — m), а суммированіе распространено на всю систему.

Потенціалъ же mV всей системы на такую частицу, *которая не находится въ поверхностномъ слоѣ*, выразится слѣдующею суммою:

$$mV=m\,\mathsf{S}\,\mathrm{m}F(\mathfrak{r}),$$

гдѣ

$$F(\mathfrak{r})=\int\varphi(\mathfrak{r})\,d\mathfrak{r};$$

здѣсь введены обозначенія параграфа 32-го.

Пренебрегая третьими и высшими степенями разности $(\mathfrak{r}-r)$, функцію $F(\mathfrak{r})$ можно представить такъ:

$$F(\mathfrak{r})=F(r)+(\mathfrak{r}-r)\varphi(r)+\frac{(\mathfrak{r}-r)^2}{2}\frac{d\varphi(r)}{dr},$$

а если замѣнить здѣсь разность $(\mathfrak{r}-r)$ выраженіемъ (148), приведеннымъ въ предыдущемъ параграфѣ, то получимъ слѣдующее приближенное выраженіе для функціи $F(\mathfrak{r})$:

$$F(\mathfrak{r})=F(r)+\left(\alpha+\frac{1}{2}\varkappa^2\right)\frac{\varphi(r)}{r}+\alpha^2\frac{d\left(\frac{\varphi(r)}{r}\right)}{rdr}, \ldots\ldots .(159)$$

гдѣ отброшены члены, заключающіе третьи и высшія степени отношеній $(\Delta u : r)$, $(\Delta v : r)$, $(\Delta w : r)$.

Подставивъ въ (159) вмѣсто α и $\varkappa$ выраженія ихъ (150) и (149), найдемъ, что половина произведенія σV выразится слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{1}{2}\sigma V = \Phi, \dots\dots\dots\dots\dots\dots \textbf{(160, a)}$$

$$\Phi = \frac{\sigma}{2} \mathsf{S}\, mF(r) - \Phi_0 - W \dots\dots\dots\dots \textbf{(160, b)}$$

$$2\Phi_0 = N_1^0\left(2\varepsilon_1 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right) + 2T_1^0\left(2g_1 + \frac{du}{dy}\frac{du}{dz} + \frac{dv}{dy}\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\frac{dw}{dz}\right) +$$
$$+ N_2^0\left(2\varepsilon_2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dy}\right)^2\right) + 2T_2^0\left(2g_2 + \frac{du}{dz}\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dz}\frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dz}\frac{dw}{dx}\right) +$$
$$+ N_3^0\left(2\varepsilon_3 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dz}\right)^2\right) + 2T_3^0\left(2g_3 + \frac{du}{dx}\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dx}\frac{dw}{dy}\right),$$

здѣсь W означаетъ однородную функцію второй степени отъ ε_1, ε_2, ε_3, g_1, g_2, g_3, выражаемую формулою (154) предыдущаго параграфа.

Во всѣхъ суммахъ вида S, заключающихся въ этихъ выраженіяхъ, суммированіе распространяется на всю сферу радіуса равнаго ρ, описанную вокругъ взятой точки тѣла, предполагая, что эта точка не находится въ наружномъ поверхностномъ слоѣ тѣла.

Если взять точку тѣла, находящуюся въ наружномъ поверхностномъ слоѣ, то для нея Φ выразится также формулою (160, b), но суммированія S будутъ распространены не по полной сферѣ радіуса ρ, описанной вокругъ взятой точки, но только по той части этой сферы, которая заполнена веществомъ тѣла, такъ какъ часть этой сферы выступаетъ внаружу тѣла.

Полученное выраженіе для V, равнаго $(2\Phi : \sigma)$, подставимъ въ выраженіе потенціала Π всей системы на сьбя, который, подобно выраженію (157), представимъ въ видѣ интеграла *распространеннаго по всѣмъ элементамъ объема, занимаемаго тѣломъ въ разсматриваемый моментъ времени:*

$$\Pi = \iiint \frac{\sigma_1}{\sigma} \Phi dO; \dots\dots\dots\dots\dots \textbf{(161)}$$

здѣсь, какъ и въ интегралѣ (157), σ_1 есть плотность въ деформированномъ состояніи, а dO есть объемъ одного изъ элементовъ тѣла въ этомъ состояніи, такъ что:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{1+\theta}, \quad dO = d\mathrm{x}\, d\mathrm{y}\, d\mathrm{z}, \dots\dots\dots\dots \textbf{(162)}$$

гдѣ:

$$\mathrm{x} = x + u, \quad \mathrm{y} = y + v, \quad \mathrm{z} = z + w.$$

Теперь слѣдуетъ составить варьяцію отъ П; но прежде этого мы преобразуемъ этотъ интегралъ, распространенный по объему, занимаемому тѣломъ въ деформированномъ состояніи, въ интегралъ, распространенный по тому объему, который оно занимало въ предварительномъ состояніи.

При такомъ преобразованіи мы должны будемъ замѣнить $d\mathrm{x}\,d\mathrm{y}\,d\mathrm{z}$ черезъ $D\,dx\,dy\,dz$, гдѣ

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial x}, & \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial y}, & \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial x}, & \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial y}, & \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial x}, & \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial y}, & \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\varepsilon_1, & \frac{\partial u}{\partial y}, & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x}, & 1+\varepsilon_2, & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x}, & \frac{\partial w}{\partial y}, & 1+\varepsilon_3 \end{vmatrix},$$

то есть

$$D = (1+\theta) = \frac{\sigma}{\sigma_1}.$$

Послѣ этого потенціалъ П получитъ такой видъ:

$$\Pi = \iiint \Phi\,dx\,dy\,dz, \dots\dots\dots\dots\dots \quad (163)$$

гдѣ интегралъ распространенъ по объему тѣла въ его *предварительномъ состояніи.*

Возьмемъ теперь варьяцію отъ П:

$$\delta\Pi = \iiint \delta\Phi\,dx\,dy\,dz, \dots\dots\dots\dots\dots \quad (164)$$

гдѣ:

$$\delta\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}\frac{\partial\delta u}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\frac{\partial\delta u}{\partial y} + \frac{\partial\Phi}{\partial u_3}\frac{\partial\delta u}{\partial z} +$$
$$+ \frac{\partial\Phi}{\partial v_1}\frac{\partial\delta v}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2}\frac{\partial\delta v}{\partial y} + \frac{\partial\Phi}{\partial v_3}\frac{\partial\delta v}{\partial z} +$$
$$+ \frac{\partial\Phi}{\partial w_1}\frac{\partial\delta w}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial w_2}\frac{\partial\delta w}{\partial y} + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_3}\frac{\partial\delta w}{\partial z}; \dots\dots\dots\dots \quad (165)$$

здѣсь, для краткости, производныя отъ v и w по x означены черезъ v_1 и w_1, производныя отъ w и u по y — черезъ w_2 и u_2 и производныя отъ u и v по z — черезъ u_3 и v_3.

Теперь снова сдѣлаемъ преобразованіе интеграла (164) отъ координатъ первоначальныхъ (x, y, z) къ координатамъ x, y, z, тогда варьяція отъ П получитъ такой видъ:

$$\delta\Pi = \iiint \frac{\delta\Phi}{1+\theta}\,d\mathrm{x}\,d\mathrm{y}\,d\mathrm{z}, \dots\dots\dots\dots\dots \quad (166)$$

гдѣ интегралъ распространенъ по объему тѣла въ его *деформированномъ состояніи.*

Замѣнимъ производную отъ δu по x слѣдующею суммою:

$$\frac{\partial \delta u}{\partial x} = \frac{\partial \delta u}{\partial \mathrm{x}} \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial x} + \frac{\partial \delta u}{\partial \mathrm{y}} \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial x} + \frac{\partial \delta u}{\partial \mathrm{z}} \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial x}$$

и съ прочими подобными производными поступимъ такимъ же образомъ; сдѣлавъ это, найдемъ, что подъинтегральная функція въ интегралѣ (166) получитъ слѣдующій видъ:

$$\frac{\delta \Phi}{1+\theta} = F_1 \frac{\partial \delta u}{\partial \mathrm{x}} + F_2 \frac{\partial \delta u}{\partial \mathrm{y}} + F_3 \frac{\partial \delta u}{\partial \mathrm{z}} +$$

$$+ G_1 \frac{\partial \delta v}{\partial \mathrm{x}} + G_2 \frac{\partial \delta v}{\partial \mathrm{y}} + G_3 \frac{\partial \delta v}{\partial \mathrm{z}} +$$

$$+ H_1 \frac{\partial \delta w}{\partial \mathrm{x}} + H_2 \frac{\partial \delta w}{\partial \mathrm{y}} + H_3 \frac{\partial \delta w}{\partial \mathrm{z}}, \qquad \qquad (167)$$

здѣсь:

$$F_1 = \frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1}\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial u_3}\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial z}\right)$$

$$F_2 = \frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1}\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial u_3}\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial z}\right)$$

$$G_1 = \frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v_1}\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_2}\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial v_3}\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial z}\right)$$

и т. п.; приэтомъ:

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1} = N_1^0(1+\varepsilon_1) + T_3^0 u_2 + T_2^0 u_3 + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_1},$$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial u_2} = T_3^0(1+\varepsilon_1) + N_2^0 u_2 + T_1^0 u_3 + \frac{\partial W}{\partial (2g_3)},$$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial u_3} = T_2^0(1+\varepsilon_1) + T_1^0 u_2 + N_3^0 u_3 + \frac{\partial W}{\partial (2g_2)},$$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial v_1} = N_1^0 v_1 + T_3^0(1+\varepsilon_2) + T_2^0 v_3 + \frac{\partial W}{\partial (2g_3)},$$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_2} = T_3^0 v_1 + N_2^0(1+\varepsilon_2) + T_1^0 v_3 + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_2},$$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial v_3} = T_2^0 v_1 + T_1^0(1+\varepsilon_2) + N_3^0 v_3 + \frac{\partial W}{\partial (2g_1)},$$

и т. д.; кромѣ того, пренебрегая вторыми и высшими степенями производныхъ отъ u, v, w:

$$\frac{1}{1+\theta}\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial x} = 1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \quad \frac{1}{1+\theta}\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial y} = u_2, \quad \frac{1}{1+\theta}\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial z} = u_3,$$

$$\frac{1}{1+\theta}\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial x} = v_1, \quad \frac{1}{1+\theta}\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial y} = 1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3, \quad \frac{1}{1+\theta}\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial z} = v_3,$$

$$\frac{1}{1+\theta}\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial x} = w_1, \quad \frac{1}{1+\theta}\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial y} = w_2, \quad \frac{1}{1+\theta}\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial z} = 1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2.$$

Если пренебречь вторыми и высшими степенями величинъ ε_1, ε_2, ε_3, u_2, u_3, v_1, v_3, w_1, w_2 и сравнить полученныя такимъ образомъ выраженія для F_1, F_2, F_3, $G_1, \ldots H_3$ съ формулами (153) предыдущаго параграфа, то окажется, что:

$$F_1 = -N_1, \quad G_2 = -N_2, \quad H_3 = -N_3,$$

$$G_3 = H_2 = -T_1, \quad H_1 = F_3 = -T_2, \quad F_2 = G_1 = -T_3.$$

Отсюда слѣдуетъ, что варьяція отъ П выразится слѣдующимъ интеграломъ, распространеннымъ по *объему, занятому тѣломъ въ деформированномъ состояніи:*

$$\delta\Pi = -\iiint Q\, dx\, dy\, dz, \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(166, } bis\textbf{)}$$

гдѣ:

$$Q = N_1 \frac{\partial \delta u}{\partial x} + N_2 \frac{\partial \delta v}{\partial y} + N_3 \frac{\partial \delta w}{\partial z} + T_1\left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial z}\right) +$$

$$+ T_2\left(\frac{\partial \delta u}{\partial z} + \frac{\partial \delta w}{\partial x}\right) + T_3\left(\frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{\partial \delta u}{\partial y}\right) \ldots\ldots\ldots \textbf{(167, } bis\textbf{)}$$

Каждое изъ девяти произведеній, входящихъ въ составъ Q, можно преобразовать такимъ образомъ, какъ напримѣръ слѣдующее:

$$N_1 \frac{\partial \delta u}{\partial x} = \frac{\partial (N_1 \delta u)}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial x} \delta u;$$

затѣмъ, воспользовавшись формулами преобразованія (16) параграфа 10-го, можемъ получить слѣдующее выраженіе для $\delta\Pi$:

$$\delta\Pi = \iiint (P_1 \delta u + P_2 \delta v + P_3 \delta w)\, dO - \iint (S_1 \delta u_s + S_2 \delta v_s + S_3 \delta w_s)\, dS, \ldots \textbf{(168)}$$

гдѣ:

$$P_1 = \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z}, \qquad S_1 = N_1 \lambda + T_3 \mu + T_2 \nu,$$

$$P_2 = \frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z}, \qquad S_2 = T_3 \lambda + N_2 \mu + T_1 \nu,$$

$$P_3 = \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z}, \qquad S_3 = T_2 \lambda + T_1 \mu + N_3 \nu,$$

$$\lambda = \cos(n, X), \quad \mu = \cos(n, Y) \quad \nu = \cos(n, Z);$$

здѣсь интегралъ объемный распространенъ *по объему тѣла въ деформированномъ состояніи*, интегралъ поверхностный — по наружной поверхности этого объема, а n есть нормаль, возстановленная изъ точки элемента dS *внаружу* тѣла.

Составимъ теперь равенство, выражающее начало д'Аламбера:

$$\iiint[(\sigma_1 \mathfrak{X} + P_1 - \sigma_1 u'')\,\delta u + (\sigma_1 \mathfrak{Y} + P_2 - \sigma_1 v'')\,\delta v + (\sigma_1 \mathfrak{Z} + P_3 - \sigma_1 w'')\,\delta w]\,dO +$$

$$+ \iint[(X_s - S_1)\,\delta u_s + (Y_s - S_2)\,\delta v_s + (Z_s - S_3)\,\delta w_s]\,dS = 0.$$

Если тѣло свободно, то варьяціи координатъ всѣхъ точекъ тѣла произвольны, а потому получаются слѣдующія дифференціальныя уравненія для всѣхъ точекъ тѣла:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1 \frac{d^2u}{dt^2} &= \sigma_1 \mathfrak{X} + \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z}\\ \sigma_1 \frac{d^2v}{dt^2} &= \sigma_1 \mathfrak{Y} + \frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z}\\ \sigma_1 \frac{d^2w}{dt^2} &= \sigma_1 \mathfrak{Z} + \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ (169)$$

и слѣдующія уравненія для точекъ наружной поверхности:

$$\left.\begin{aligned}X_s &= N_1 \cos(nX) + T_3 \cos(nY) + T_2 \cos(nZ),\\ Y_s &= T_3 \cos(nX) + N_2 \cos(nY) + T_1 \cos(nZ),\\ Z_s &= T_2 \cos(nX) + T_1 \cos(nY) + N_3 \cos(nZ),\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ (170)$$

гдѣ n есть наружная нормаль къ деформированной поверхности.

Въ томъ случаѣ, когда какія либо точки тѣла закрѣплены неподвижно, въ уравненія этихъ точекъ войдутъ реакціи связей.

Такимъ образомъ начало д'Аламбера даетъ тѣ самыя уравненія (17), которыя получены другимъ путемъ въ главѣ I-й этой книги; притомъ выраженія для $N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3$, полученныя въ этомъ параграфѣ, тождественны съ выраженіями (153), найденными въ предыдущемъ параграфѣ.

§ 36. Коэфиціенты упругости. Число коэфиціентовъ для тѣлъ кристаллическихъ и изотропно-упругихъ.

Въ выраженіяхъ (153), кромѣ производныхъ отъ u, v, w по x, y, z, заключаются: 15 величинъ A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, (211), (121), (112), (301), (310), (130), (031), (013), (103) и 6 предварительныхъ напряженій $N_1^0, N_2^0, N_3^0, T_1^0, T_2^0, T_3^0$.

Всѣ эти величины, числомъ 21, могутъ быть функціями отъ x, y, z; видъ этихъ функцій зависитъ отъ строенія тѣла въ его предварительномъ состояніи.

Внутри тѣла, то есть въ точкахъ, не находящихся въ наружномъ поверхностномъ слоѣ, эти величины могутъ быть *постоянными коэфиціентами*, независящими отъ x, y, z; но это возможно только въ такихъ тѣлахъ, внутреннія части которыхъ имѣютъ однородное строеніе по всякимъ параллельнымъ между собою направленіямъ, проведеннымъ черезъ всѣ внутреннія точки тѣла.

Всякія двѣ части такого тѣла, ограниченныя какими либо замкнутыми, подобно расположенными и тождественными по виду и по размѣрамъ поверхностями, будутъ имѣть одинаковое строеніе, гдѣ бы эти части ни были внутри тѣла, лишь бы онѣ не заключали въ себѣ частей поверхностнаго слоя.

Тѣло, обладающее въ предварительномъ состояніи такимъ параллелизмомъ и такою однородностью строенія, называется тѣломъ *однороднаго строенія.*

Надо имѣть въ виду, что наружный поверхностный слой можетъ отличаться по своему строенію отъ прочихъ частей тѣла, такъ что тѣло можетъ имѣть внутри строеніе однородное, а въ наружномъ поверхностномъ слоѣ — неоднородное.

И такъ, во внутреннихъ точкахъ тѣла, обладающаго однороднымъ строеніемъ, каждая сумма вида:

$$-\frac{\sigma}{2}\mathfrak{S}\,\mathfrak{m}\frac{\varphi(r)}{r}\mathfrak{x}^{\alpha}\mathfrak{y}^{\beta}\mathfrak{z}^{\gamma},\quad -\frac{\sigma}{2}\mathfrak{S}\,\mathfrak{m}\,\psi(r)\,\mathfrak{x}^{\alpha}\mathfrak{y}^{\beta}\mathfrak{z}^{\gamma}\ldots\ldots\ldots \textbf{(171)}$$

имѣетъ одно и то же значеніе во всѣхъ точкахъ тѣла, а потому величины $A_1, A_2, \ldots$ $\ldots$ (103), N_1^0, $N_2^0, \ldots\ldots T_3^0$ суть постоянные коэфиціенты для этого тѣла; эти коэфиціенты называются *коэфиціентами упругости* такого тѣла и число ихъ не болѣе двадцати одного.

1) Если строеніе тѣла не только однородно, но и еще симметрично относительно параллельныхъ между собою плоскостей, а именно, если сферы радіуса ϱ, окружающія каждую точку, симметричны относительно плоскостей проведенныхъ черезъ центры сферъ параллельно плоскости YZ, то нѣкоторые изъ коэфиціентовъ упругости будутъ равны нулю. Въ самомъ дѣлѣ, при такомъ строеніи тѣла каждой частицѣ, находящейся внутри сферы дѣйствія частицы M, соотвѣтствуетъ симметричная ей относительно сказанной плоскости другая частица равной массы, имѣющая тѣ же $\mathfrak{y}$ и $\mathfrak{z}$, но противоположное по знаку $\mathfrak{x}$; по этому всѣ суммы вида (171), заключающія $\mathfrak{x}$ въ нечетной степени, будутъ равны нулю. Стало быть будутъ равны нулю коэфиціенты: T_2^0, T_3^0, (112), (121), (103), (130), (301), (310).

И такъ, *при симметричномъ строеніи относительно плоскостей параллельныхъ YZ, тѣло будетъ имѣть 13 коэфиціентовъ упругости:*

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ B_1,\ B_2,\ B_3,\ (211),\ (031),\ (013),\ N_1^0,\ N_2^0,\ N_3^0,\ T_1^0.$$

2) *Если строеніе тѣла имѣетъ такую же симметрію не только относительно плоскостей параллельныхъ плоскости YZ, но и еще относительно плоскостей параллельныхъ плоскости ZX*, то будутъ равны нулю также и тѣ коэфиціенты, въ которые входитъ $\mathfrak{y}$ въ нечетной степени, а именно: T_1^0, (211), (031) и (013) и *останется 9 коэфиціентовъ, именно:*

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ B_1,\ B_2,\ B_3,\ N_1^0,\ N_2^0,\ N_3^0,$$

откуда видно, что тогда и плоскости параллельныя плоскости XY суть тоже плоскости симметріи.

Въ этомъ случаѣ выраженія (153) получаютъ слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= N_1^0 + (A_1 + N_1^0)\,\varepsilon_1 + (B_3 - N_1^0)\,\varepsilon_2 + (B_2 - N_1^0)\,\varepsilon_3, \\ N_2 &= N_2^0 + (B_3 - N_2^0)\,\varepsilon_1 + (A_2 + N_2^0)\,\varepsilon_2 + (B_1 - N_2^0)\,\varepsilon_3, \\ N_3 &= N_3^0 + (B_2 - N_3^0)\,\varepsilon_1 + (B_1 - N_3^0)\,\varepsilon_3 + (A_3 + N_3^0)\,\varepsilon_3, \end{aligned}\right\} \ldots (172,\,1)$$

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= g_1\,(2B_1 + N_2^0 + N_3^0) + \omega_1\,(N_2^0 - N_3^0), \\ T_2 &= g_2\,(2B_2 + N_3^0 + N_1^0) + \omega_2\,(N_3^0 - N_1^0), \\ T_3 &= g_3\,(2B_3 + N_1^0 + N_2^0) + \omega_3\,(N_1^0 - N_2^0). \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (172,\,2)$$

3) Если строеніе тѣла имѣетъ симметрію вокругъ осей параллельныхъ оси Z-овъ, такъ что сферы радіуса ρ, окружающія каждую точку M тѣла, имѣютъ симметрію вокругъ осей параллельныхъ этой оси и проведенныхъ черезъ центръ сферы, то число коэфиціентовъ упругости уменьшается еще на четыре. Въ самомъ дѣлѣ, тогда коэфиціенты упругости должны оставаться неизмѣнными при поворотѣ плоскостей ZX и ZY относительно тѣла на произвольный уголъ вокругъ оси Z-овъ. Повернемъ эти плоскости на прямой уголъ, такъ чтобы новая ось X-овъ совпала съ прежнею осью Y-овъ, а новая ось Y-овъ съ отрицательнымъ направленіемъ прежней оси X-овъ, тогда новыя координаты $\mathfrak{x}'$ и $\mathfrak{y}'$ будутъ равны старымъ $\mathfrak{y}$ и $-\mathfrak{x}$ и новые коэфиціенты $(N_1^0)'$, A_1', $(N_2^0)'$, A_2', B_1' будутъ соотвѣтственно равны старымъ N_2^0, A_2, N_1^0, A_1, B_2; но такъ какъ такой поворотъ осей не долженъ вовсе измѣнить величинъ всѣхъ коэфиціентовъ, то отсюда слѣдуетъ, что должны быть:

$$N_1^0 = N_2^0,\ \ A_1 = A_2,\ \ B_1 = B_2.$$

Повернемъ тѣ же плоскости на уголъ въ 45°; тогда новыя $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$, которыя мы означимъ черезъ $\mathfrak{x}_2$ и $\mathfrak{y}_2$, выразятся въ прежнихъ такъ:

$$\mathfrak{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}),\ \ \mathfrak{y}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathfrak{y} - \mathfrak{x}),$$

а потому новое B_3', которое должно быть равно прежнему B_3, выразится такъ:

$$B_3' = B_3 = -\frac{\sigma}{2}\mathfrak{S}\,m\,\psi(r)\,\mathfrak{x}_2^2\,\mathfrak{y}_2^2 = -\frac{\sigma}{8}\mathfrak{S}\,m\,\psi(r)\,\mathfrak{x}^4 - \frac{\sigma}{8}\mathfrak{S}\,m\,\psi(r)\,\mathfrak{y}^4 + $$
$$+\frac{\sigma}{4}\mathfrak{S}\,m\,\psi(r)\,\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2,$$

то есть: $2B_3 = A_1 - B_3$ и отсюда: $A_1 = A_2 = 3B_3$.

Такимъ образомъ оказывается, что *тѣло, имѣющее строеніе однородное и симметричное вокругъ осей параллельныхъ оси Z-овъ, имѣетъ 5 коэфиціентовъ упругости:*

$$N^0,\ N_3^0,\ A_3,\ B,\ B_3.$$

Въ этомъ случаѣ выраженія (153) получаютъ слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= N^0 + (3B_3 + N^0)\,\varepsilon_1 + (B_3 - N^0)\,\varepsilon_2 + (B - N^0)\,\varepsilon_3, \\ N_2 &= N^0 + (B_3 - N^0)\,\varepsilon_1 + (3B_3 + N^0)\,\varepsilon_2 + (B - N^0)\,\varepsilon_3, \\ N_3 &= N_3^0 + (B - N^0)\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + (A_3 + N_3^0)\,\varepsilon_3, \end{aligned}\right\} . \quad (173, 1)$$

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= g_1\,(2B + N^0 + N_3^0) + (N^0 - N_3^0)\,\omega_1 \\ T_2 &= g_2\,(2B + N^0 + N_3^0) + (N_3^0 - N^0)\,\omega_2 \\ T_3 &= 2g_3\,(B_3 + N^0). \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (173, 2)$$

4) Если строеніе однороднаго тѣла не только симметрично относительно трехъ системъ плоскостей, параллельныхъ плоскостямъ координатъ, но кромѣ того одинаково по тремъ взаимно перпендикулярнымъ направленіямъ, параллельнымъ осямъ координатъ (такъ что по направленіямъ параллельнымъ оси X-овъ строеніе ничѣмъ не отличается отъ строенія по направленіямъ параллельнымъ оси Y-овъ и отъ строенія по направленіямъ параллельнымъ оси Z-овъ), то тогда должно быть:

$$A_1 = A_2 = A_3, \;\; B_1 = B_2 = B_3, \;\; N_1^0 = N_2^0 = N_3^0.$$

Въ этомъ случаѣ выраженія (153) будутъ заключать только *три коэфиціента упругости* A, B и N^0 и будутъ имѣть слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= N^0 + (A + N^0)\,\varepsilon_1 + (B - N^0)(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) \\ N_2 &= N^0 + (A + N^0)\,\varepsilon_2 + (B - N^0)(\varepsilon_3 + \varepsilon_1) \\ N_3 &= N^0 + (A + N^0)\,\varepsilon_3 + (B - N^0)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (174, 1)$$

$$T_1 = 2g_1\,(B + N^0),\; T_2 = 2g_2\,(B + N^0),\; T_3 = 2g_3\,(B + N^0) \,.. (174, 2)$$

5) Строеніе однороднаго тѣла называется *изотропнымъ*, если оно одинаково по всѣмъ направленіямъ, такъ что симметрія строенія сферъ радіуса ρ существуетъ вокругъ всякихъ діаметровъ и относительно всякихъ діаметральныхъ плоскостей этихъ сферъ.

Въ этихъ случаяхъ $A = 3B$ и число коэфиціентовъ упругости равно двумъ. *Выраженія* (153) *принимаютъ для изотропно-упругаго тѣла такой видъ:*

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= N^0 + 2K\varepsilon_1 + (B - N^0)\,\theta, \; T_1 = 2g_1\,K \\ N_2 &= N^0 + 2K\varepsilon_2 + (B - N^0)\,\theta, \; T_2 = 2g_2\,K \\ N_3 &= N^0 + 2K\varepsilon_3 + (B - N^0)\,\theta, \; T_3 = 2g_3\,K \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (175)$$

$$K = B + N^0.$$

Здѣсь K можно разсматривать какъ одинъ изъ коэфиціентовъ упругости, а $(B - N^0)$ — какъ другой; полуразность этихъ двухъ коэфиціентовъ дастъ величину N^0.

Изъ этихъ разсужденій и полученныхъ формулъ между прочимъ видно, что въ тѣлѣ, имѣющемъ изотропное строеніе, или же строеніе указанное въ пунктѣ 4-мъ настоящаго параграфа, предварительныя напряженія во всѣхъ точкахъ тѣла и на всякія площадки одинаковы и нормальны къ нимъ, такъ что эллипсоиды предварительныхъ напряженій суть сферы.

§ 37. Разсмотрѣніе значеній двухъ коэфиціентовъ упругости изотропно-упругаго тѣла.

Представимъ себѣ какое либо тѣло, которое въ предварительномъ состояніи имѣетъ изотропное строеніе во всѣхъ своихъ частяхъ за исключеніемъ поверхностнаго наружнаго слоя.

На основаніи сказаннаго въ предыдущемъ параграфѣ относительно однородности строенія, предварительное напряженіе N^0 внутри всей изотропной части тѣла должно имѣть одну и ту же величину. Между прочимъ можемъ замѣтить, что постоянство величины N^0 вытекаетъ также и изъ уравненій (135) параграфа 33-го, примѣненныхъ къ изотропной части тѣла, такъ какъ онѣ въ этомъ случаѣ принимаютъ слѣдующій видъ:

$$\frac{\partial N^0}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial N^0}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial N^0}{\partial z} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (135, bis)$$

Для того, чтобы внутренняя изотропная часть тѣла имѣла предварительное напряженіе N^0 не равное нулю, необходимо, чтобы наружный поверхностный слой, имѣющій неизотропное *) строеніе, производилъ на внутреннюю часть поверхностное напряженіе, равное N^0. Слѣдуетъ замѣтить, что строеніе поверхностнаго слоя можетъ быть при этомъ не только не изотропнымъ, но даже и не параллельно-однороднымъ.

Предположимъ, что къ наружной поверхности тѣла будутъ приложены поверхностныя напряженія, которыя, черезъ посредство поверхностнаго слоя, передадутся изотропной части тѣла. Спрашивается, каковы должны быть напряженія, испытываемыя наружною поверхностью изотропной части тѣла со стороны поверхностнаго слоя, для того, чтобы эта часть тѣла получила слѣдующую деформацію:

$$u = ax,\ v = by,\ w = cz, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (176)$$

(гдѣ a, b, c суть величины постоянныя), и въ этомъ видѣ осталась бы въ покоѣ?

По формуламъ (175) предыдущаго параграфа мы найдемъ, что при такой деформаціи въ изотропной части тѣла разовьются слѣдующія напряженія:

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= N^0 + 2Ka + (B - N^0)(a + b + c),\ T_1 = 0, \\ N_2 &= N^0 + 2Kb + (B - N^0)(a + b + c),\ T_2 = 0, \\ N_3 &= N^0 + 2Kc + (B - N^0)(a + b + c),\ T_3 = 0. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (177)$$

---

*) Неизотропное однородное строеніе называется строеніемъ *эолотропнымъ*.

Эти напряженія должны удовлетворять уравненіямъ равновѣсія, которыя получатся изъ уравненій (169) параграфа 35-го, если въ нихъ положить ускоренія равными нулю (такъ какъ тѣло находится въ покоѣ). Такъ какъ объемныя силы не дѣйствуютъ на тѣло, то эти уравненія равновѣсія будутъ:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x}+\frac{\partial T_3}{\partial y}+\frac{\partial T_2}{\partial z}=0,\ \frac{\partial T_3}{\partial x}+\frac{\partial N_2}{\partial y}+\frac{\partial T_1}{\partial z}=0,\ \frac{\partial T_2}{\partial x}+\frac{\partial T_1}{\partial y}+\frac{\partial N_3}{\partial z}=0.\,.\,\mathbf{(178)}$$

Выраженія (177) удовлетворяютъ этимъ дифференціальнымъ уравненіямъ, такъ какъ всѣ три T равны нулю и всѣ три N постоянны внутри всего тѣла.

На площадки наружной поверхности изотропной части тѣла должны дѣйствовать слѣдующія напряженія со стороны поверхностнаго слоя:

$$X_\mu = N_1 \cos(\mu, X),\ \ Y_\mu = N_2 \cos(\mu, Y),\ \ Z_\mu = N_3 \cos(\mu, Z), \ldots \mathbf{(179)}$$

гдѣ μ есть нормаль къ наружной поверхности изотропной части тѣла, направленная *внаружу* этой части.

Разсмотримъ сначала такой случай, когда $b=c=a=a_1$, то есть когда линейныя растяженія по всѣмъ направленіямъ одинаковы и равны a_1.

Въ этомъ случаѣ наружная поверхность тѣла въ деформированномъ состояніи подобна и подобно-расположена съ поверхностью тѣла въ предварительномъ состояніи; то же самое относится и къ поверхностямъ, ограничивающимъ любыя части тѣла.

Кубическое расширеніе единицы объема вещества равно $3a_1$; $\theta = 3a_1$.

Всѣ три главныя напряженія равны между собою:

$$N_1 = N_2 = N_3 = N^0 + 2Ka_1 + 3(B - N^0)\,a_1 = N.$$

На площадки наружной поверхности изотропной части должны дѣйствовать нормальныя къ площадкамъ напряженія равныя N (на единицу поверхности).

Если вычесть изъ N предварительныя напряженія N^0, то получимъ прибавочныя напряженія $(N - N^0)$, подъ вліяніемъ которыхъ тѣло получаетъ такую деформацію.

Отношеніе между величиною прибавочнаго напряженія $(N - N^0)$ и величиною производимаго имъ кубическаго расширенія $(\theta = 3a_1)$ называется *объемнымъ сопротивленіемъ* вещества изотропнаго тѣла или *модулемъ сжимаемости;* этотъ коэфиціентъ будемъ обозначать буквою R*).

$$R = \frac{(N - N^0)}{3a_1} = \frac{2}{3}K + B - N^0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(180)}$$

Представимъ себѣ теперь что изотропная часть тѣла испытала слѣдующую деформацію:

$$u = 0,\ v = b_2 x,\ w = 0,$$

то есть простой сдвигъ параллельно плоскости YZ по оси Y-овъ (см. примѣръ 1-й въ § 24 на стр. 66-й).

*) По англійски этотъ коэфиціентъ называется: resilience of volume.

По формуламъ (175) окажется, что при этомъ сдвигѣ разовьются слѣдующія напряженія:

$$N_1 = N^0 = N_2 = N_3,\ T_3 = Kb_2,\ T_1 = T_2 = 0.$$

Эти выраженія удовлетворяютъ дифференціальнымъ уравненіямъ (178).

Предположимъ, что наружною поверхностью изотропной части тѣла служатъ двѣ плоскости, параллельныя плоскости YZ; къ этимъ плоскостямъ должны быть приложены слѣдующія напряженія:

$$X_\mu = N^0,\ Y_\mu = Kb_2,\ Z_\mu = 0,\ \text{тамъ гдѣ } \cos(\mu, X) = +1$$

$$X_\mu = -N^0,\ Y_\mu = -Kb_2,\ Z_\mu = 0,\ \text{„ „ } \cos(\mu, X) = -1.$$

на единицу поверхности.

Отношеніе между величиною прибавочнаго тангенціальнаго напряженія и величиною сдвига имъ производимаго, называется простою твердостью или *сопротивленіемъ срѣзыванію* (Simple regidity, resistance to shearing), или *модулемъ твердости*; изъ предыдущаго видно, что модуль твердости равенъ K.

Возвратимся снова къ деформаціи (176) и на этотъ разъ предположимъ, что изотропная часть тѣла есть призма, длина которой параллельна оси X-овъ, или цилиндръ, параллельный этой оси, и что $c = b = b_3$, $a = a_3$.

Кубическое расширеніе при этомъ будетъ: $\theta = a_3 + 2b_3$.

Въ формулахъ (177) замѣнимъ теперь коэфиціентъ $(B - N^0)$ разностью $(R - \frac{2}{3}K)$ (согласно съ формулою (180)), тогда, въ примѣненіи къ настоящему случаю, онѣ получатъ слѣдующій видъ:

$$N_1 = N^0 + 2Ka_3 + (R - \tfrac{2}{3}K)(a_3 + 2b_3) \ldots\ldots\ldots \mathbf{(181)}$$

$$N_3 = N_2 = N^0 + 2Kb_3 + (R - \tfrac{2}{3}K)(a_3 + 2b_3) = N \ldots\ldots \mathbf{(182)}$$

Къ поверхностямъ плоскихъ основаній цилиндра или призмы должны быть приложены слѣдующія напряженія:

$$X_\mu = \pm N_1,\ Y_\mu = Z_\mu = 0,$$

гдѣ верхній знакъ относится къ тому основанію, на которомъ $\cos(\mu, X) = +1$.

Къ боковымъ же поверхностямъ цилиндра или призмы должны быть приложены нормальныя напряженія величины N.

Если къ боковой поверхности не приложено нормальныхъ добавочныхъ напряженій, такъ что $N - N^0 = 0$, то отношеніе b_3 къ a_3 опредѣлится изъ равенства (182), сдѣлавъ въ немъ N равнымъ N^0; изъ него получимъ:

$$\frac{b_3}{a_3} = -\frac{1}{2}\frac{3R - 2K}{3R + K}.$$

Это отрицательное *количество, выражающее величину отношенія между поперечнымъ линейнымъ сжатіемъ и продольнымъ линейнымъ удлиненіемъ вещества призмы* при приложеніи къ концамъ ея растягивающихъ ее напряженій, будемъ обозначать черезъ $-\varkappa$.

$$\varkappa = -\frac{b_3}{a_3} = \frac{1}{2}\,\frac{3R-2K}{3R+K} \dots\dots\dots\dots\dots (183)$$

Замѣнивъ b_3 черезъ $(-a_3\varkappa)$ въ выраженіи кубическаго расширенія θ_3 единицы объема вещества призмы и въ выраженіи напряженія N_1, получимъ:

$$\theta_3 = a_3(1-2\varkappa) = \frac{3Ka_3}{3R+K} \dots\dots\dots\dots\dots (184)$$

$$N_1 = N^0 + \frac{9RKa_3}{3R+K}.$$

Величина отношенія между прибавочнымъ напряженіемъ $(N_1 - N^0)$, удлинняющимъ призму, и величиною удлинненія a_3 единицы длины призмы, называется Юнговымъ модулемъ или *модулемъ упругости* вещества призмы. Модуль упругости мы будемъ обозначать черезъ E:

$$E = \frac{N_1 - N^0}{a_3} = \frac{9RK}{3R+K} \dots\dots\dots\dots\dots (185)$$

Кубическое расширеніе θ_3 можетъ быть выражено такъ:

$$\theta_3 = \frac{N_1 - N^0}{3R} \dots\dots\dots\dots\dots (186)$$

Если бы та же призма была подвержена дѣйствію прибавочныхъ напряженій $(N_1 - N^0)$, приложенныхъ не только къ основаніямъ призмы, но ко всей наружной поверхности ея, то вещество призмы получило бы кубическое расширеніе θ равное:

$$\theta = \frac{N_1 - N^0}{R},$$

т. е. втрое больше θ_3.

Сопоставимъ теперь все то, что можно сказать относительно значенія коэфиціентовъ упругости K и $(B - N^0)$ изотропнаго тѣла и относительно величинъ R, $\varkappa$ и E.

K есть модуль твердости изотропнаго тѣла и выражаетъ величину тангенціальнаго напряженія, которое должно приложить къ параллельнымъ между собою наружнымъ гранямъ тѣла для того, чтобы сообщить ему простой сдвигъ величины равной единицѣ. Модуль твердости, имѣя измѣренія напряженія, можетъ быть выраженъ *динами*, дѣленными на квадратный сантиметръ; такъ, напримѣръ, модуль твердости мѣди равенъ:

$$4{,}47 \,.\, 10^{11} \,\frac{\text{(граммъ)}}{\text{(сантиметръ) (секунда)}^2}.$$

Для того, чтобы сообщить мѣдному пласту простой сдвигъ, имѣющій величину: $2\,\mathrm{tg}\,10' = 0{,}0058$, надо приложить къ каждому квадратному миллиметру поверхности пласта слѣдующее тангенціальное напряженіе, выраженное въ вѣсѣ килограмма:

$$\frac{4{,}47}{98}\,.\,58\,.\,10 \text{ килограммовъ} = 26{,}4 \text{ килограмма.}$$

R есть модуль сжимаемости или растяжимости изотропнаго тѣла и выражаетъ величину отношенія между давленіемъ, которое надо приложить къ каждой единицѣ наружной поверхности тѣла, чтобы сообщить ему одинаковое линейное сжатіе по всѣмъ направленіямъ, и величиною получающагося тогда кубическаго сжатія единицы объема тѣла; обратно, для произведенія такого кубическаго расширенія надо приложить такое же натяженіе къ каждой единицѣ поверхности. Величина модуля сжимаемости тоже выражается динами на квадратный сантиметръ, такъ какъ кубическое сжатіе и расширеніе единицы объема выражается числомъ отвлеченнымъ.

Такъ, для нѣкотораго образца стали:

$$R = 1{,}84\,.\,10^{12}\,\frac{\text{дин.}}{(\text{сантим.})^2};$$

для того, чтобы произвести кубическое сжатіе въ 0,00001, придется приложить къ каждому квадратному миллиметру наружной поверхности слѣдующее давленіе въ килограммахъ:

$$\frac{1{,}84}{98}\;10 \text{ килогр.} = 0{,}188 \text{ килограмма.}$$

E, модуль упругости, имѣетъ слѣдующее значеніе. Если къ основаніямъ призматическаго тѣла будутъ приложены нормальныя натяженія или давленія, а къ боковой поверхности не будетъ приложено внѣшнихъ напряженій, то призма будетъ растягиваться (при натяженіяхъ) или сжиматься (при давленіяхъ). *Отношеніе между величиною натяженія, приложеннаго къ единицѣ основаній призмы и величиною получающагося тогда растяженія единицы длины призмы представляетъ величину E;* для произведенія линейнаго сжатія той же величины надо приложить такія же давленія. Такъ какъ линейное растяженіе единицы длины выражается отвлеченнымъ числомъ, то измѣренія модуля упругости тѣ же что и прочихъ двухъ модулей.

Для нѣкотораго образца стали:

$$E = 2{,}14\,.\,10^{12}\,\frac{\text{дин.}}{(\text{сантим.})^2}.$$

Чтобы произвести линейное растяженіе въ 0,001 этого тѣла, придется приложить къ каждому квадратному миллиметру основаній призмы слѣдующее натяженіе въ киллограммахъ:

$$\frac{2{,}14}{98}\;10^3 \text{ килогр.} = 21{,}8 \text{ килограмма.}$$

$\varkappa$ есть отношеніе величины поперечнаго линейнаго сжатія къ величинѣ продольнаго растяженія или отношеніе величины поперечнаго линейнаго расши-

ренія къ величинѣ продольнаго линейнаго сжатія, происходящихъ въ призмѣ при обстоятельствахъ только что указанныхъ, т. е. при растягиваніи или сжатіи призмы напряженіями, приложенными къ основаніямъ ея; $\varkappa$ есть отвлеченная дробь.

Зная двѣ изъ четырехъ величинъ K, R, E, $\varkappa$ *), можно вычислить двѣ другія по слѣдующимъ формуламъ:

$$E=\frac{9RK}{3R+K}=3R\,(1-2\varkappa)=2K\,(1+\varkappa)\,\ldots\ldots\ldots\ (\mathbf{186})$$

$$R=\frac{E}{3\,(1-2\varkappa)}=\frac{2K}{3}\,\frac{1+\varkappa}{1-2\varkappa}=\frac{EK}{3\,(3K-E)}\,\ldots\ldots\ldots\ (\mathbf{187})$$

$$\varkappa=\frac{3R-2K}{2\,(3R+K)}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{E}{3R}\right)=\frac{E}{2K}-1\,\ldots\ldots\ldots\ (\mathbf{188})$$

$$K=\frac{E}{2\,(1+\varkappa)}=\frac{3R}{2}\,\frac{1-2\varkappa}{1+\varkappa}=\frac{3ER}{9R-E}\,\ldots\ldots\ldots\ (\mathbf{189})$$

Другой коэфиціентъ упругости изотропнаго тѣла можетъ быть выраженъ въ двухъ изъ четырехъ предыдущихъ величинъ такими формулами:

$$B-N^0=R-\frac{2}{3}K=3R\frac{3R-E}{9R-E}=\frac{3R\varkappa}{1+\varkappa}=$$

$$=K\frac{E-2K}{3K-E}=\frac{2K\varkappa}{1-2\varkappa}=\frac{E\varkappa}{(1-2\varkappa)\,(1+\varkappa)}\,\ldots\ldots\ldots\ (\mathbf{190})$$

Зная оба коэфиціента упругости можемъ вычислить предварительное напряженіе N^0:

$$N^0=\frac{5}{6}K-\frac{R}{2}=\frac{K}{2}\,\frac{1-4\varkappa}{1-2\varkappa}=\frac{K}{2}\,\frac{(5K-2E)}{3K-E}\,\ldots\ldots\ldots\ (\mathbf{191})$$

---

*) Приводимъ здѣсь указаніе относительно того, какими буквами и знаками обозначены эти величины въ нѣкоторыхъ наиболѣе авторитетныхъ новѣйшихъ сочиненіяхъ и статьяхъ по теоріи упругости:

	K	$B-N^0$	E	R	$\varkappa$
Cauchy, Exercices [1]............	$\frac{k}{2}$	K	—	—	—
Poisson, Mémoires [2]	$k+K$	$k-K$	—	—	—
Lamé, Théorie de l'élasticité [3]...	μ	λ	E	$\frac{1}{\alpha}$	—
Saint-Venant, Résumé et Memoires [4]	$e, \frac{k}{2}, G$	e', K	E	—	—
Clebsch, Elasticität [5]	F	—	E	—	μ
Kirchhoff, Mechanik [6]...........	K	$2K\theta$	—	—	—
Thomson, Natural philosophy [7].	n	—	M	k	σ
Weyrauch, Theorie elastischer Körper	G	—	E	—	$\frac{1}{\varepsilon}$

[1]) Cauchy, Exercices de mathématique, III-me année, 1828.

[2]) Poisson, Mémoire sur l'equilibre et le mouvement des corps élastiques; Mémoires de l'Institut. T. VIII, 1829. Journ. de l'école polytechn. Cahier 20, 1831.

[3]) Lamé, Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides, 1852.

[4]) Saint-Venant, Résumé des Leçons...., Résistance des corps solides p. Navier, 1864; Mémoire sur la torsion des prismes (Savants étrangers, T. XIV) 1853, Mémoire sur la flexion des prismes (Journal des mathématiques, p. Liouville, T. I, série 2) 1855.

[5]) Clebsch, Theorie der Elasticität fester Körper. 1862.

[6]) Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik, 1876; Gesammte Abhandlungen.

[7]) W. Thomson and Tait, Treatise on Natural Philosophy, Vol. II, 1883.

Отсюда видно, что если бы предварительное напряженіе было равно нулю, то было бы:

$$R = \frac{5}{3} K, \;\; E = \frac{5}{2} K = \frac{3}{2} R, \;\; \varkappa = 0{,}25 \ldots\ldots\ldots \textbf{(192)}$$

Приводимъ таблицу величинъ модулей для различныхъ тѣлъ, извлеченную изъ книги: Everett, Units and phisical constants. 1879.

	Плотность σ	K	R	E	$\varkappa$
Флинтгласъ	2,942	$0{,}240 . 10^{12}$	$0{,}415 . 10^{12}$	$0{,}603 . 10^{12}$	0,258
Латунь (провол.) . .	8,471	$0{,}366 . 10^{12}$	—	$1{,}075 . 10^{12}$	0,469 ?
Сталь	7,849	$0{,}819 . 10^{12}$	$1{,}841 . 10^{12}$	$2{,}139 . 10^{12}$	0,310
Желѣзо	7,677	$0{,}769 . 10^{12}$	$1{,}456 . 10^{12}$	$1{,}963 . 10^{12}$	0,275
Чугунъ	7,235	$0{,}532 . 10^{12}$	$0{,}964 . 10^{12}$	$1{,}349 . 10^{12}$	0,267
Мѣдь	8,843	$0{,}447 . 10^{12}$	$1{,}684 . 10^{12}$	$1{,}234 . 10^{12}$	0,378

Если изотропное тѣло будетъ подвергнуто одинаковому (по всей его поверхности) давленію или натяженію величины P (на единицу поверхности), *то каждая единица его объема получитъ кубическое сжатіе или расширеніе величины* $(P : R)$, *причемъ линейное сжатіе или растяженіе по всѣмъ направленіямъ будетъ равно* $(P : 3R)$.

Если изотропное тѣло, имѣющее видъ призмы или цилиндра, будетъ подвержено натяженіямъ, приложеннымъ къ его основаніямъ, причемъ къ каждой единицѣ поверхности будетъ приложено натяженіе P, *то линейное удлинненіе единицы длины, параллельной длинѣ призмы, будетъ равно* $(P : E)$, *линейное сжатіе единицы длины по всякому направленію, перпендикулярному къ длинѣ призмы, будетъ равно* $(P\varkappa : E)$ *и вещество тѣла получитъ кубическое расширеніе равное* $(P : 3R)$ *на единицу объема. Если нормальныя напряженія* P *на основаніяхъ призмы будутъ давленіями, то линейное продольное сжатіе будетъ* $(P : E)$, *линейное поперечное расширеніе будетъ* $(P\varkappa : E)$ *и вещество тѣла получитъ кубическое сжатіе* $(P : 3R)$ *на единицу объема.*

§ 38. Формулы Грина, выражающія зависимость между напряженіями и давленіями.

Формулы (153) стр. 93, выражающія зависимость между напряженіями и деформаціями тѣла, были выведены Коши*) такимъ образомъ, какъ показано въ § 34-мъ. Въ § 35 приведенъ другой выводъ этихъ формулъ, исходя изъ начала д'Аламбера.

Гринъ далъ другія формулы, выражающія зависимость между напряженіями и деформаціями**). Эти формулы онъ выводитъ изъ начала д'Аламбера, предполагая, что потенціалъ частичныхъ силъ, дѣйствующихъ на каждый элементъ деформируемаго тѣла, есть функція отъ коэфиціентовъ чистой деформаціи элемента, такъ что потенціалъ всѣхъ частичныхъ силъ на себя будетъ:

$$\Pi = -\iiint \varphi(e_1, e_2, e_3, 2g_1, 2g_2, 2g_3)\, dx\, dy\, dz, \ldots\ldots\ldots \textbf{(193)}$$

*) Cauchy, Exercices de Mathématiques, 4-me année.

**) George Green, On the Laws of the Reflexion and Refraction of Light ot the common surface of two non — crystallized Media; On the Propagation of Light in crystallized Media. Mathematical Papers of G. Green, edited by Ferrers, Lond. 1871, Macmillan and C°.

гдѣ

$$e_1 = \frac{\partial u}{\partial x},\ e_2 = \frac{\partial v}{\partial y},\ e_3 = \frac{\partial w}{\partial z},\ 2g_1 = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z},\ 2g_2 = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x},\ 2g_3 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Разложивъ φ по возрастающимъ степенямъ ничтожно-малыхъ величинъ e и g и пренебрегая членами, заключающими третьи и высшія степени ихъ, можемъ въ выраженіи (193) оставить вмѣсто φ сумму: $\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2$, гдѣ φ_0 не заключаютъ величинъ e и g, φ_1 есть линейная функція, а φ_2— однородная функція второй степени.

Поэтому варьяція отъ Π выразится такъ:

$$\delta\Pi = -\iiint(\delta\varphi_1 + \delta\varphi_2)\,dx\,dy\,dz.$$

Здѣсь $\delta\varphi_1$ есть линейная функція отъ δe_1, δe_2, δe_3, $2\delta g_1$, $2\delta g_2$, $2\delta g_3$ съ постоянными коэфиціентами. Когда тѣло находится въ предварительномъ состояніи въ покоѣ, при отсутствіи всякихъ внѣшнихъ силъ и напряженій, тогда должно быть:

$$0 = \iiint \delta\varphi_1\ dx\,dy\,dz$$

и слѣдовательно коэфиціенты первыхъ степеней величинъ e и g должны быть равны нулю.

Изъ этого слѣдуетъ, что $\delta\Pi$ должна заключать подъ интеграломъ варьяцію отъ функціи φ_2 второй степени и однородной относительно величинъ e и g, съ постоянными коэфиціентами.

И такъ по Грину:

$$\delta\Pi = -\iiint \delta\varphi_2\ dx\,dy\,dz, \qquad \textbf{(194)}$$

гдѣ:

$$\begin{aligned}2\varphi_2 = A_1e_1^2 &+ 2B_3e_1e_2 + 2B_2e_1e_3 + 4H_1e_1g_1 + 4K_3e_1g_2 + 4K_2e_1g_3 + \\ &+ A_2e_2^2 + 2B_1e_2e_3 + 4L_3e_2g_1 + 4H_2e_2g_2 + 4K_1e_2g_3 + \\ &+ A_3e_3^2 + 4L_2e_3g_1 + 4L_1e_3g_2 + 4H_3e_3g_3 + \\ &\quad 4G_1g_1^2 + 8F_3g_1g_2 + 8F_2g_1g_3 + \\ &+ 4G_2g_2^2 + 8F_1g_2g_3 + \\ &+ 4G_3g_3^2.\end{aligned}$$

Сравнивъ данное Гриномъ выраженіе для $\delta\Pi$ съ выраженіемъ (166, *bis*), приведеннымъ въ параграфѣ 35-мъ на стр. 99 (гдѣ Q есть сумма, выражаемая формулою (167 *bis*)), можемъ заключить, что Гриновы формулы для напряженій имѣютъ слѣдующій видъ:

$$N_1 = A_1\varepsilon_1 + B_3\varepsilon_2 + B_2\varepsilon_3 + 2H_1g_1 + 2K_3g_2 + 2K_2g_3 \quad \ldots\ldots (195,\, a)$$

$$N_2 = B_3\varepsilon_1 + A_2\varepsilon_2 + B_1\varepsilon_3 + 2L_3g_1 + 2H_2g_2 + 2K_1g_3 \quad \ldots\ldots (195,\, b)$$

$$N_3 = B_2\varepsilon_1 + B_1\varepsilon_3 + A_3\varepsilon_3 + 2L_2g_1 + 2L_1g_3 + 2H_3g_3 \quad \ldots\ldots (195,\, c)$$

$$T_1 = H_1\varepsilon_1 + L_3\varepsilon_2 + L_2\varepsilon_3 + 2G_1g_1 + 2F_3g_2 + 2F_2g_3 \quad \ldots\ldots (195,\, d)$$

$$T_2 = K_3\varepsilon_1 + H_2\varepsilon_2 + L_1\varepsilon_3 + 2F_3g_1 + 2G_2g_2 + 2F_1g_3 \quad \ldots\ldots (195,\, e)$$

$$T_3 = K_2\varepsilon_1 + K_1\varepsilon_2 + H_3\varepsilon_3 + 2F_2g_1 + 2F_1g_2 + 2G_3g_3 \quad \ldots\ldots (195,\, f)$$

и заключаютъ въ себѣ 21 коэфиціентъ упругости.

1) Если вещество тѣла имѣетъ симметричное строеніе относительно плоскостей параллельныхъ плоскости YZ, то выраженіе φ_2 не должно измѣнить своего вида при перемѣнѣ направленія оси X въ прямопротивоположное; но если мы сдѣлаемъ эту перемѣну, не измѣняя направленій положительныхъ осей Y и Z, то это повлечетъ за собою измѣненіе знаковъ величинъ u и x, а слѣдовательно измѣненіе знаковъ величинъ g_2 и g_3. Поэтому, въ случаѣ такой симметріи, коэфиціенты упругости: K_1, K_2, K_3, H_2, H_3, L_1, F_2, F_3 должны быть равны нулю.

2) Если существуетъ симметрія вещества также и относительно плоскостей параллельныхъ плоскости ZX, то должны быть равны нулю, кромѣ вышесказанныхъ, еще коэфиціенты: H_1, L_2, L_3, F_1, такъ что тогда останется 9 коэфиціентовъ:

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ B_1,\ B_2,\ B_3,\ G_1,\ G_2,\ G_3,$$

откуда видно, что тогда и плоскости параллельныя XY суть тоже плоскости симметріи.

3) Когда строеніе тѣла имѣетъ симметрію вокругъ осей, параллельныхъ оси Z-овъ, то тогда, вслѣдствіе тождества строенія параллельно осямъ X и Y, должны быть слѣдующія равенства между коэфиціентами: $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$, $G_1 = G_2$. Кромѣ того величины коэфиціентовъ упругости не должны измѣняться при поворотѣ плоскостей ZY и ZX на какой бы то ни было уголъ вокругъ оси Z-овъ, а, въ частности, на уголъ въ 45°. Сдѣлавъ такой поворотъ и означивъ новыя оси черезъ Ξ, Υ, координаты относительно этихъ осей черезъ ξ, η, проэкціи на нихъ перемѣщеній точекъ черезъ $\mathfrak{u}$ и $\mathfrak{v}$ и линейныя удлинненія по нимъ — черезъ ε_1', ε_2', а коэфиціенты сдвиговъ при новыхъ осяхъ — черезъ g_1', g_2', g_3', мы найдемъ, что:

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_1' + \varepsilon_2'}{2} - g_3',\quad \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1' + \varepsilon_2'}{2} + g_3',\quad \varepsilon_3 = \varepsilon_3'$$

$$g_1 = \frac{g_2' + g_1'}{\sqrt{2}},\quad g_2 = \frac{g_2' - g_1'}{\sqrt{2}},\quad 2g_3 = \varepsilon_1' - \varepsilon_2';$$

и тогда окажется, что: $2G_3 = A_1 - B_3$.

Поэтому, въ случаѣ симметріи строенія тѣла вокругъ направленій, параллельныхъ оси Z-овъ, функція φ_2 будетъ имѣть слѣдующій видъ:

$$2\varphi_2 = B_3\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + A_3\varepsilon_3^2 + 2B\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\,\varepsilon_3 +$$
$$+ 4G\,(g_1^2 + g_2^2) + 2G_3\,(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2g_3^2) \quad \ldots\ldots\ldots (196)$$

4) Если строеніе вещества не только симметрично относительно трехъ системъ плоскостей, параллельныхъ плоскостямъ координатъ, но кромѣ того одинаково по направленіямъ параллельнымъ всѣмъ тремъ осямъ, то должны существовать слѣдующія равенства между коэфиціентами:

$$A_1 = A_2 = A_3,\ B_1 = B_2 = B_3,\ G_1 = G_2 = G_3;$$

тогда:

$$2\varphi_2 = A\,(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) + 4G\,(g_1^2 + g_2^2 + g_3^2) + 2B\,(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2) . \textbf{(197)}$$

5) Наконецъ, въ случаѣ изотропіи должно быть: $2G = A - B$; останется только два коэфиціента, въ качествѣ которыхъ можно удержать B и G; тогда функція φ_2 будетъ имѣть слѣдующій видъ:

$$2\varphi_2 = B\theta^2 + 2G\,(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + 2g_1^2 + 2g_2^2 + 2g_3^2) \ldots\ldots \textbf{(198)}$$

Выраженія (195) для изотропнаго тѣла получатъ поэтому такой видъ:

$$\left.\begin{array}{l} N_1 = 2G\varepsilon_1 + B\theta,\ T_1 = 2Gg_1 \\ N_2 = 2G\varepsilon_2 + B\theta,\ T_2 = 2Gg_2 \\ N_3 = 2G\varepsilon_3 + B\theta,\ T_3 = 2Gg_3 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(199)}$$

Разница между этими выраженіями и выраженіями (175) заключается только въ томъ, что здѣсь нѣтъ предварительнаго напряженія N^0, вмѣсто K здѣсь G и вмѣсто $(B - N^0)$ здѣсь B; поэтому G въ формулахъ (199) означаетъ модуль твердости K, а B равняется $\left(R - \frac{2}{3}K\right)$.

§ 39. Сравненіе формулъ Коши съ формулами Грина.

Сравнивъ формулы Коши, полученныя въ §§ 34, 35 и 36, съ формулами Грина, полученными въ предыдущемъ параграфѣ, мы должны обратить вниманіе на то обстоятельство, что въ первыя входятъ ω_1, ω_2, ω_3 — угловыя перемѣщенія элементовъ вещества, между тѣмъ какъ эти величины не вошли въ формулы Грина вслѣдствіе сдѣланнаго при ихъ выводѣ предположенія, что потенціалъ частичныхъ силъ каждаго элемента независитъ отъ его угловаго перемѣщенія.

Это различіе между формулами Грина и Коши теряется, когда ихъ примѣняемъ къ изотропно-упругимъ тѣламъ или къ тѣламъ имѣющимъ такъ называемую кубическую изотропію, то есть къ тѣмъ, строеніе которыхъ тождественно по направленіямъ параллельнымъ тремъ осямъ координатъ и объ которыхъ было говорено въ пунктахъ 4-хъ параграфовъ 36-го и 38-го.

По отношенію къ этимъ тѣламъ остается еще одно различіе между формулами Коши и Грина: въ первыя входитъ предварительное напряженіе N^0, которое не входитъ во вторыя.

Въ настоящее время представляется еще пока преждевременнымъ входить въ теоретическое изслѣдованіе вліянія предварительныхъ напряженій и поверхностнаго слоя въ явленіяхъ упругости. Въ слѣдующихъ главахъ этой книги я буду пользоваться преимущественно формулами Грина.

VII.

О равновѣсіи упругаго тѣла.

§ 40. Величины, опредѣляющія состояніе деформаціи тѣла.

Въ параграфѣ 38-мъ при выводѣ формулъ Грина было предположено, что потенціалъ частичныхъ силъ каждаго элемента тѣла зависитъ только отъ величинъ ε_1, ε_2, ε_3, $2g_1$, $2g_2$, $2g_3$, опредѣляющихъ чистую деформацію.

Посмотримъ теперь, насколько деформированное состояніе всего тѣла будетъ опредѣлено, если будутъ даны величины ε_1, ε_2, ε_3, $2g_1$, $2g_2$, $2g_3$, въ видѣ функцій отъ x, y, z, для всѣхъ точекъ тѣла.

Положимъ, что мы нашли нѣкоторыя функціи u, v, w отъ x, y, z, удовлетворяющія уравненіямъ:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x}, & 2g_1 &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial y}, & 2g_2 &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \varepsilon_3 &= \frac{\partial w}{\partial z}, & 2g_3 &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \qquad (200)$$

Спрашивается, нельзя ли найти еще какія либо другія функціи u_1, v_1, w_1 отъ x, y, z, удовлетворяющія тѣмъ же дифференціальнымъ уравненіямъ, и отличающіяся отъ первыхъ?

Если это возможно, то разности между ними, то есть $(u-u_1)$, $(v-v_1)$, $(w-w_1)$, которыя мы означимъ черезъ u_2, v_2 и w_2, должны быть функціями отъ x, y, z, удовлетворяющими слѣдующимъ дифференціальнымъ уравненіямъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial v_2}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial w_2}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial w_2}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (201)$$

Взявъ отъ перваго изъ уравненій второй строки производную по x, отъ втораго — производную по y и отъ третьяго — производную по z, будемъ имѣть:

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial z \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 v_2}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y \partial z} = 0.$$

Сложивъ первыя два изъ полученныхъ сейчасъ равенствъ и вычтя третье, найдемъ, что вторая производная отъ w_2 по x и по y равна нулю; поэтому должны быть также равны нулю и двѣ другія вторыя производныя, заключающіяся въ составленныхъ сейчасъ равенствахъ.

Далѣе, путемъ дифференцированія, изъ уравненій (201) окажется, что всѣ безъ исключенія вторыя производныя отъ u_2, v_2, w_2 по x, y, z, равны нулю. Отсюда слѣдуетъ, что всѣ первыя производныя отъ u_2, v_2, w_2 по x, y, z суть величины постоянныя.

Такъ какъ, на основаніи уравненій (201), три изъ этихъ частныхъ производныхъ перваго порядка равны нулю, а остальныя три по двѣ равны и прямо-противоположны, то функціи u_2, v_2, w_2, удовлетворяющія уравненіямъ (201), должны имѣть слѣдующій видъ:

$$u_2 = a + z\beta - y\gamma,\ v_2 = b + x\gamma - z\alpha,\ w_2 = c + y\alpha - x\beta \ldots . \textbf{(202)}$$

гдѣ a, b, c суть величины $(u_2)_0$, $(v_2)_0$, $(w_2)_0$ для точки, предварительныя координаты которой суть $x=0$, $y=0$, $z=0$, а постоянныя α, β, γ имѣютъ слѣдующія значенія:

$$2\alpha = \frac{dw_2}{dy} - \frac{dv_2}{dz},\ 2\beta = \frac{du_2}{dz} - \frac{dw_2}{dx},\ 2\gamma = \frac{dv_2}{dx} - \frac{du_2}{dy},$$

т. е. это суть нѣкоторыя угловыя перемѣщенія, одинаковыя для всѣхъ элементовъ тѣла.

Величины u_2, v_2, w_2 суть проэкціи тѣхъ перемѣщеній, которыя совершатъ точки тѣла при произвольномъ поступательномъ перемѣщеніи a, b, c, соединенномъ съ поворотомъ всего тѣла на ничтожно-малый уголъ вокругъ произвольной оси.

Отсюда видно, что *функціи отъ x, y, z, выражающія* ε_1, ε_2, ε_3, $2g_1$, $2g_2$, $2g_3$, *вполнѣ опредѣляютъ нѣкоторую ничтожно-малую деформацію тѣла.*

Если закрѣпимъ: какую либо точку тѣла (примемъ ее за начало координатъ), касательную къ какой либо линіи, проведенной черезъ эту точку (направленіе касательной примемъ за ось X-овъ) и касательную плоскость къ какой либо поверхности, проведенной черезъ ту точку и черезъ ту линію (примемъ эту плоскость за плоскость XY), то этимъ будетъ обусловлено, что a, b, c, α, β и γ должны быть равны нулю. Эти условія можно выразить нижеслѣдующимъ образомъ, взявъ за оси координатъ главныя оси деформаціи закрѣпляемаго элемента.

При $x=0$, $y=0$, $z=0$ должны быть:

$$\left.\begin{array}{c} u_0=0,\ v_0=0,\ w_0=0 \\ \left(\frac{dw}{dy}\right)_0=0,\ \left(\frac{dw}{dx}\right)_0=0,\ \left(\frac{dv}{dx}\right)_0=0 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(203)}$$

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ закрѣпленная касательная должна совпадать съ осью X-овъ, то перемѣщенія по оси Y-овъ точекъ, взятыхъ на линіи вблизи начала координатъ, должны быть безконечно-малыми величинами высшихъ порядковъ малости, т. е. $x\left(\frac{dv}{dx}\right)_0$ должно быть равно нулю; подобнымъ же образомъ увидимъ, что закрѣпленіе касательной плоскости требуетъ, что производныя отъ w по x и по y были бы равны нулю въ началѣ координатъ.

§ 41. Дифференціальныя уравненія втораго порядка, которымъ должны удовлетворять $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, 2g_1, 2g_2, 2g_3$.

Если бы мы имѣли не только $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, 2g_1, 2g_2, 2g_3$, но и еще $2\omega_1, 2\omega_2, 2\omega_3$, выраженными въ функціяхъ отъ x, y, z, то пришлось-бы опредѣлять u, v, w по имѣющимся выраженіямъ ихъ первыхъ производныхъ:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x}=\varepsilon_1, && \frac{\partial v}{\partial x}=g_3+\omega_3, && \frac{\partial w}{\partial x}=g_2-\omega_2, \\ &\frac{\partial u}{\partial y}=g_3-\omega_3, && \frac{\partial v}{\partial y}=\varepsilon_2, && \frac{\partial w}{\partial y}=g_1+\omega_1, \\ &\frac{\partial u}{\partial z}=g_2+\omega_2, && \frac{\partial v}{\partial z}=g_1-\omega_1; && \frac{\partial w}{\partial z}=\varepsilon_3. \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(204)$$

Функціи $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, g_1, g_2, g_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ не могутъ быть заданы по произволу; для того, чтобы $\varepsilon_1, g_3-\omega_3, g_2+\omega_2$ были дѣйствительно частными производными по x, y, z отъ одной и той же функціи u, необходимо, чтобы онѣ удовлетворяли слѣдующимъ тремъ дифференціальнымъ уравненіямъ:

$$\frac{\partial g_3}{\partial z}-\frac{\partial \omega_3}{\partial z}=\frac{\partial g_2}{\partial y}+\frac{\partial \omega_2}{\partial y},\ \frac{\partial g_2}{\partial x}+\frac{\partial \omega_2}{\partial x}=\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial z},\ \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial y}=\frac{\partial g_3}{\partial x}-\frac{\partial \omega_3}{\partial x}\ldots(205,\ 1)$$

Подобнымъ же образомъ составимъ еще шесть дифференціальныхъ уравненій перваго порядка, которымъ должны удовлетворять эти функціи:

$$\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial z}=\frac{\partial g_1}{\partial y}-\frac{\partial \omega_1}{\partial y},\ \frac{\partial g_1}{\partial x}-\frac{\partial \omega_1}{\partial x}=\frac{\partial g_3}{\partial z}+\frac{\partial \omega_3}{\partial z},\ \frac{\partial g_3}{\partial y}+\frac{\partial \omega_3}{\partial y}=\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x}\ldots(205,\ 2)$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial z}+\frac{\partial \omega_1}{\partial z}=\frac{\partial \varepsilon_3}{\partial y},\ \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial x}=\frac{\partial g_2}{\partial z}-\frac{\partial \omega_2}{\partial z},\ \frac{\partial g_2}{\partial y}-\frac{\partial \omega_2}{\partial y}=\frac{\partial g_1}{\partial x}+\frac{\partial \omega_1}{\partial x}\ldots(205,\ 3)$$

Такова зависимость между частными производными тѣхъ функцій, которыми могутъ быть ε, g и ω.

Эти уравненія (205) могутъ быть рѣшены относительно частныхъ производныхъ отъ $\omega_1, \omega_2, \omega_3$; сдѣлавъ это, получимъ восемь слѣдующихъ равенствъ:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial y}=\frac{\partial g_1}{\partial y}-\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial z},\ \frac{\partial \omega_2}{\partial z}=\frac{\partial g_2}{\partial z}-\frac{\partial \varepsilon_3}{\partial x},\ \frac{\partial \omega_3}{\partial x}=\frac{\partial g_3}{\partial x}-\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial z}=\frac{\partial \varepsilon_3}{\partial y}-\frac{\partial g_1}{\partial z},\ \frac{\partial \omega_2}{\partial x}=\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial z}-\frac{\partial g_2}{\partial x},\ \frac{\partial \omega_3}{\partial y}=\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x}-\frac{\partial g_3}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x}=\frac{\partial g_2}{\partial y}-\frac{\partial g_3}{\partial z},\ \frac{\partial \omega_2}{\partial y}=\frac{\partial g_3}{\partial z}-\frac{\partial g_1}{\partial x}$$

и еще одно, девятое, которое можно представить такъ:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x}+\frac{\partial \omega_2}{\partial y}+\frac{\partial \omega_3}{\partial z}=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(206)$$

Три изъ восьми первыхъ равенствъ выражаютъ частныя производныя отъ ω_1 по y, z, x. Составивъ изъ нихъ два выраженія для $\frac{\partial^2\omega_1}{\partial y \partial z}$ и приравнявъ ихъ, получимъ дифференціальное уравненіе (207, 1), приведенное ниже; составивъ же по два выраженія для $\frac{\partial^2\omega_1}{\partial z \partial x}$ и для $\frac{\partial^2\omega_1}{\partial x \partial y}$ мы получимъ уравненія (208, 3) и (208, 2). Далѣе, подобнымъ же образомъ отъ выраженій частныхъ производныхъ отъ ω_2 по x, y и z получимъ дифференціальныя уравненія (207, 2), (208, 1) и опять полученное уже (208, 3). Наконецъ, составивъ два выраженія для $\frac{\partial^2\omega_3}{\partial x \partial y}$, получимъ дифференціальное уравненіе (207, 3).

$$2\frac{\partial^2 g_1}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial y^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(207, 1)}$$

$$2\frac{\partial^2 g_2}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial z^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(207, 2)}$$

$$2\frac{\partial^2 g_3}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(207, 3)}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 g_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 g_3}{\partial z \partial x} \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(208, 1)}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 g_2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g_3}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 g_1}{\partial x \partial y} \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(208, 2)}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 g_3}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 g_1}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 g_2}{\partial y \partial z} \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(208, 3)}$$

Этимъ шести совокупнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ втораго порядка должны удовлетворять тѣ функціи, которыя должны выражать собою линейныя удлиненія и сдвиги элементовъ сплошнаго тѣла, получившаго ничтожно-малую деформацію.

§ 42. Уравненія равновѣсія упругаго тѣла.

Для того, чтобы упругое тѣло могло быть въ деформированномъ состояніи въ покоѣ, необходимо, чтобъ къ нему приложены были объемныя силы и напряженія, опредѣляемыя изъ слѣдующихъ уравненій равновѣсія упругаго тѣла

$$\left.\begin{aligned} \sigma\mathfrak{X} + \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} = 0, \\ \sigma\mathfrak{Y} + \frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z} = 0, \\ \sigma\mathfrak{Z} + \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \textbf{(169, } bis\textbf{)}$$

и (170) стр. 100 § 35-го.

Уравненія (169, *bis*) получены изъ уравненій (169) стр. 100 параграфа 35-го, положивъ въ нихъ u, v, w независящими отъ времени и отбросивъ члены, заключающія произведенія изъ величинъ ε и g и ихъ частныхъ производныхъ (пренебрегая такими членами мы замѣнили: x, y, z и σ_1 черезъ x, y, z и σ).

Если будутъ заданы силы и напряженія, приложенныя къ упругому тѣлу, то уравненія (169, *bis*) и (170) вмѣстѣ съ дифференціальными уравненіями (207, 208, 200)

и условіями (203) должны послужить для опредѣленія того деформированнаго состоянія, въ которомъ должно находиться упругое тѣло подъ вліяніемъ этихъ силъ.

§ 43. Объ устойчивости внутренняго равновѣсія упругаго тѣла.

Если къ тѣлу неприложено никакихъ объемныхъ силъ и дѣйствіемъ внѣшнихъ напряженій оно приведено въ деформированное состояніе, въ которомъ всѣ точки его поверхности закрѣплены неподвижно, то внутреннее равновѣсіе его, по началу возможныхъ перемѣщеній, должно быть таково, чтобы варьяція отъ потенціала П всѣхъ частичныхъ силъ равнялась нулю.

Для устойчивости же равновѣсія консервативной системы необходимо, чтобы потенціалъ ея былъ максимумъ въ положеніи равновѣсія *).

По формуламъ же Грина (§ 38) потенціалъ упругаго тѣла, за вычетомъ членовъ нулевой степени относительно $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, g_1, g_2, g_3$, заключаетъ подъ интеграломъ однородную функцію второй степени относительно этихъ величинъ.

Для того, чтобы интегралъ:

$$\Pi - \Pi_0 = -\iiint \varphi_2\, dx\, dy\, dz \quad \textbf{(209)}$$

былъ максимумъ, при всякомъ видѣ закрѣпленной поверхности, необходимо, чтобы φ_2 была такою однородною функціею втораго порядка отъ шести вышесказанныхъ величинъ, которая была бы положительною при всякихъ значеніяхъ этихъ величинъ.

Это требуетъ, чтобы величины коэфиціентовъ упругости удовлетворяли нѣкоторымъ условіямъ, число которыхъ при отсутствіи симметріи въ строеніи можетъ достигать шести; эти условія таковы **):

$$A_1 > 0, \quad \begin{vmatrix} A_1, & B_3 \\ B_3, & A_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} A_1, & B_3, & B_2 \\ B_3, & A_2, & B_1 \\ B_2, & B_1, & A_3 \end{vmatrix} > 0, \text{ и т. д.}$$

Въ случаѣ кубической изотропіи эти условія будутъ:

$$A > 0,\ A^2 - B^2 > 0,\ A^3 - 3AB^2 + 2B^3 > 0,\ G > 0.$$

Въ случаѣ полной изотропіи, если вмѣсто A подставимъ $2G + B$, то, на основаніи четвертаго условія, найдемъ изъ третьяго, что должно быть $2G + 3B > 0$; пер-

*) Стр. 786 кинетической части курса аналитической механики.

**) Всякая однородная функція втораго порядка отъ сколькихъ бы то ни было величинъ $x_1, x_2, \ldots x_n$:

$$f = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} a_{k,i}\, x_i\, x_k$$

можетъ быть, какъ показалъ Якоби, приведена къ слѣдующему виду:

$$f = \frac{U_1^2}{p_1} + \frac{U_2^2}{p_1 p_2} + \ldots + \frac{U_i^2}{p_{i-1} p_i} + \ldots + \frac{U_n^2}{p_{n-1} p_n},$$

...е и второе условіе (которыя получатъ такой видъ: $2G+B>0$, $G+B>0$) тогда, ...и положительныхъ G и $2G+3B$, будутъ удовлетворены и подавно.

Такъ какъ $3B=R-2K$ и $G=K$, то *условія устойчивости изотропнаго ...ла требуютъ, чтобы оба модуля K и R (твердости и сжимаемости) были ...ложительными.*

Если коэфиціенты упругости удовлетворяютъ условіямъ устойчивости, то *при ...крѣпленной поверхности и при отсутствіи объемныхъ силъ тѣло можетъ на...диться только въ одномъ внутреннемъ состояніи равновѣсія.* Чтобы убѣдиться ...ъ этомъ, положимъ, что существуютъ два такія состоянія деформаціи, одно, при ко...ромъ u, v, w, ε и g суть:

$$(u)_1,\ (v)_1,\ (w)_1,\ (\varepsilon_1)_1,\ (\varepsilon_2)_1,\ldots\ldots(g_3)_1$$

... другое, при которомъ онѣ суть:

$$(u)_2,\ (v)_2,\ (w)_2,\ (\varepsilon_1)_2,\ (\varepsilon_2)_2,\ldots\ldots(g_3)_2;$$

...а поверхности тѣла обѣ системы значеній тождественны.

Означимъ черезъ u', v', w', ε_1',....g_3' разности ихъ, т. е.: $(u)_2-(u)_1$, $(v)_2-(v)_1$,....и т. д. Обѣ системы величинъ ε, g должны удовлетворять уравненіямъ ...авновѣсія, а потому разности ихъ должны удовлетворять уравненіямъ:

$$\frac{\partial N_1'}{\partial x}+\frac{\partial T_3'}{\partial y}+\frac{\partial T_2'}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial T_3'}{\partial x}+\frac{\partial N_2'}{\partial y}+\frac{\partial T_1'}{\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial T_2'}{\partial x}+\frac{\partial T_1'}{\partial y}+\frac{\partial N_3'}{\partial z}=0,$$

...дѣ N_1', N_2'...T_3' есть то, во что обратить N_1, N_2,...T_3 черезъ замѣну вели...инъ ε_1, ε_2,...g_3 величинами ε_1', ε_2',....g_3'.

Помноживъ первое изъ этихъ уравненій на u', второе на v', третье на w', взявъ ...умму, помножимъ на элементъ объема и возьмемъ интегралъ по всему объему; произведя

...дѣ p_i и U_i суть слѣдующіе опредѣлители:

$$p_i=\begin{vmatrix} a_{11}, a_{12},\ldots a_{1i} \\ a_{12}, a_{22},\ldots a_{2i} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{1i}, a_{2i},\ldots a_{ii}\end{vmatrix},\quad U_i=\begin{vmatrix} a_{11}, a_{12},\ldots a_{1,i-1}, \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1} \\ a_{12}, a_{22},\ldots a_{2,i-1}, \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{1i}, a_{2i},\ldots a_{i,i-1}, \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_i}\end{vmatrix}$$

См. статью: Über eine elementare Transformation eines in Bezug auf jedes von zwei Variablen-Systemen linearen und homogenen Ausdrucks. Въ Jacobi's gesammelte Werke, Band III, s. 583—590.

Изъ этой формулы видно, что f будетъ положительною при всякихъ x_1, x_2,....x_n, если:

$$p_1>0,\ p_2>0,\ldots\ldots p_n>0.$$

затѣмъ преобразованіе интеграловъ по формуламъ § 10 и принявъ во вниманіе, что на поверхности u', v' и w' равны нулю, получимъ слѣдующій результатъ:

$$\iiint (N_1'\varepsilon_1' + N_2'\varepsilon_2' + N_3'\varepsilon_3' + 2(T_1'g_1' + T_2'g_2' + T_3'g_3'))\, dO = 0,$$

или, что то же самое:

$$2\iiint \varphi_2 (\varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_3', 2g_1', 2g_2', 2g_3')\, dO = 0$$

Но φ_2 есть квадратичная функція, которая при условіи устойчивости не может быть отрицательною, поэтому интегралъ можетъ быть равенъ нулю неиначе, какъ если ε_1', ε_2', ε_3', g_1', g_2', g_3' равны нулю во всемъ тѣлѣ; слѣдовательно двухъ различныхъ состояній внутренняго равновѣсія быть не можетъ.

При дѣйствіи же внѣшнихъ объемныхъ силъ и при свободѣ наружной поверхности, тѣло, подверженное внѣшнимъ напряженіямъ, можетъ имѣть и неустойчивыя состоянія деформаціи и можетъ имѣть нѣсколько положеній равновѣсія.

VIII.

Нѣкоторые примѣры рѣшенія вопросовъ о равновѣсіи изотропно-упругаго тѣла.

§ 44. Однородный изотропный цилиндръ, подвергаемый продольному растяженію или сжатію.

Начнемъ съ изложенія простѣйшаго примѣра, въ которомъ задается деформація тѣла. Этотъ примѣръ уже отчасти былъ разсмотрѣнъ въ § 37-мъ.

Предположимъ, что изотропное тѣло есть призма или цилиндръ, неподверженный объемнымъ силамъ, а только поверхностнымъ напряженіямъ, вслѣдствіе дѣйствія которыхъ точки его получили слѣдующія перемѣщенія:

$$u = ax,\ v = by,\ w = cz,$$

гдѣ a, b, c — величины постоянныя. Предполагается, что ось X-овъ параллельна длинѣ призмы. Требуется опредѣлить, какія напряженія должны быть приложены къ поверхности призмы.

По формуламъ (175) стр. 103-й найдемъ, что напряженія T_1, T_2, T_3 будутъ равны нулю, а N_1, N_2, N_3 таковы:

$$N_1 = 2Ka + B\theta,\ N_2 = 2Kb + B\theta,\ N_3 = 2Kc + B\theta,$$

$$\theta = a + b + c,\ B = R - \frac{2}{3}K,$$

если предполагать предварительное напряженіе N^0 равнымъ нулю.

По формуламъ (170) стр. 100-й мы найдемъ, что къ основаніямъ призмы, гдѣ $\cos(nX) = \pm 1$, должны быть приложены нормальныя напряженія:

$$P_2 = +(2Ka + B\theta),\ P_1 = -(2Ka + B\theta).$$

Къ боковой же поверхности должны быть приложены слѣдующія напряженія:

$$Y_s = (2Kb + B\theta)\cos(nY),\ Z_s = (2Kc + B\theta)\cos(nZ).$$

1) Если тѣло имѣетъ видъ прямоугольнаго параллелопипеда (грани котораго параллельны плоскостямъ координатъ), то къ гранямъ его, перпендикулярнымъ къ оси Y-овъ, должно приложить равномѣрное нормальное напряженіе $Q = 2Kb + B\theta$ на единицу поверхности, а къ гранямъ перпендикулярнымъ къ оси Z-овъ равномѣрное нормальное напряженіе $H = 2Kc + B\theta$ на единицу поверхности. Кубическое расширеніе, получаемое при этомъ единицею объема тѣла, опредѣлится изъ равенства: $P + Q + H = (2K + 3B)\theta$ и окажется равнымъ:

$$\theta = \frac{P + Q + H}{3R}.$$

2) Если мы зададимъ, что $b = c$, то, при всякомъ видѣ поперечнаго сѣченія цилиндра или призмы, на боковую поверхность ея должны дѣйствовать нормальныя внѣшнія напряженія $Q = 2Kb + B\theta$, гдѣ $\theta = a + 2b$. Подъ вліяніемъ продольныхъ напряженій P и поперечныхъ напряженій Q, единица объема вещества тѣла получитъ кубическое расширеніе:

$$\theta = \frac{P + 2Q}{3R}.$$

Здѣсь между прочимъ замѣтимъ, что если ко всей поверхности призмы будетъ приложено равномѣрно нормальное напряженіе P (т. е. если $Q = P$), то получится кубическое расширеніе $(P : R)$; если будетъ приложено нормальное напряженіе P только къ каждой единицѣ боковой поверхности, то получится кубическое расширеніе: $(2P : 3R)$ и, наконецъ, если будетъ приложено нормальное напряженіе P только къ основаніямъ призмы, то получится кубическое расширеніе $(P : 3R)$.

§ 45. Крученіе призмъ.

Вопросъ о равновѣсіи призмы, подвергнутой закручиванію вокругъ продольной оси ея, былъ рѣшенъ Санъ-Венаномъ*) при слѣдующихъ предположеніяхъ:

1) что объемныя силы не дѣйствуютъ на призму,

2) что $u = -\alpha zy$, $v = \alpha zx$, т. е., что различныя сѣченія призмы закручиваются вокругъ продольной оси Z-овъ на углы, пропорціональные z (α — постоянная), но что проэкціи сѣченій на плоскость XY не искажаются,

---

*) De Saint-Venant. Sur la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion, ainsi que sur l'équilibre intérieur des solides élastiques en général, et le calcul de leur résistance à divers efforts s'exerçant simultanément, 1855. Savants étrangers tome XIV.

3) что на боковыя поверхности призмы внѣшнія напряженія не дѣйствуютъ; призма получаетъ крученіе только вслѣдствіе дѣйствія закручивающихъ напряженій, приложенныхъ къ ея оконечностямъ.

При этихъ предположеніяхъ:

$$\varepsilon_1 = 0,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\alpha z,\ \frac{\partial u}{\partial z} = -\alpha y,\ \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha z,\ \varepsilon_2 = 0,\ \frac{\partial v}{\partial z} = \alpha x;$$

а потому:

$$\theta = \varepsilon_3,\ 2g_1 = \frac{\partial w}{\partial y} + \alpha x,\ 2g_2 = \frac{\partial w}{\partial x} - \alpha y,\ 2g_3 = 0$$

$$N_1 = \left(R - \frac{2}{3}K\right)\frac{\partial w}{\partial z},\ T_1 = K\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \alpha x\right)$$

$$N_2 = \left(R - \frac{2}{3}K\right)\frac{\partial w}{\partial z},\ T_2 = K\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \alpha y\right)$$

$$N_3 = \left(R + \frac{4}{3}K\right)\frac{\partial w}{\partial z},\ T_3 = 0.$$

Уравненія внутренняго равновѣсія будутъ слѣдующія:

$$\left(R + \frac{K}{3}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} = 0,\ \left(R + \frac{K}{3}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots (210)$$

$$\left(R + \frac{4}{3}K\right)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + K\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (211)$$

Изъ уравненій (210) слѣдуетъ, что

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)}{\partial y} = 0,$$

т. е., что производная отъ w по z есть функція одного только z; пусть $\frac{\partial w}{\partial z} = f(z)$.

Эти же самыя уравненія можно еще представить и такъ:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)}{\partial z} = 0,\quad \frac{\partial\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)}{\partial z} = 0;$$

это значитъ, что частныя производныя отъ w по x и по y суть функціи отъ x и y не заключающія z; поэтому сумма вторыхъ производныхъ отъ w по x и по y есть также функція отъ x, y; означимъ ее черезъ $\varphi(x, y)$.

Слѣдовательно уравненіе (211) будетъ имѣть такой видъ:

$$\left(\frac{R}{K} + \frac{4}{3}\right)\frac{\partial f(z)}{\partial z} = -\varphi(x, y)$$

и это равенство должно быть справедливо для всѣхъ x, y, z относящихся ко всѣмъ точкамъ призмы, а между тѣмъ первая часть его заключаетъ только z, вторая же —

только x и y, поэтому обѣ части равенства должны быть равны одной и той же постоянной; пусть $f'(z) = 2C$.

Отсюда слѣдуетъ, что $f(z) = 2Cz + D$, гдѣ D другая постоянная.

Составимъ теперь выраженія напряженій, дѣйствующихъ на какую либо площадку, нормаль которой составляетъ съ осями координатъ углы, имѣющіе косинусы: λ, μ, ν

$$\left.\begin{aligned} X_n &= B\frac{\partial w}{\partial z}\lambda + K\left(\frac{\partial w}{\partial x} - ay\right)\nu, \\ Y_n &= B\frac{\partial w}{\partial z}\mu + K\left(\frac{\partial w}{\partial y} + ax\right)\nu, \\ Z_n &= K\left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} - ay\right)\lambda + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + ax\right)\mu\right) + \left(R + \frac{4}{3}K\right)\frac{\partial w}{\partial z}\nu. \end{aligned}\right\} \ldots (212)$$

Примѣнимъ первыя два изъ этихъ равенствъ къ площадкамъ боковой поверхности призмы; такъ какъ для этихъ элементовъ $\nu = 0$ и напряженій на нихъ быть не должно, то получимъ требованіе, чтобы $\frac{\partial w}{\partial z}$ т. е. $f(z)$ было равно нулю при всякихъ z; это требуетъ, чтобы C и D были равны нулю.

Третье изъ равенствъ (212), примѣненное къ элементамъ боковой поверхности, дастъ равенство:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} - ay\right)\cos(n, X) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + ax\right)\cos(n, Y) = 0, \ldots\ldots (213)$$

(гдѣ n — наружная нормаль къ боковой поверхности), которому w должно удовлетворять на боковой поверхности, или, говоря иначе, на контурѣ поперечнаго сѣченія призмы:

Теперь замѣтимъ, что на основаніи всего вышесказаннаго:

$$\varepsilon_1 = 0,\ \varepsilon_2 = 0,\ \varepsilon_3 = 0,\ \theta = 0,\ 2g_3 = 0,$$

т. е., *растяженій параллельно осямъ нѣтъ, а потому нѣтъ и кубическаго расширенія; нѣтъ также сдвиговъ параллельно плоскости XY.*

Изъ шести напряженій N и T неравны нулю только два T_1 и T_2. Перемѣщеніе w есть функція отъ x и y, удовлетворяющая дифференціальному уравненію съ частными производными втораго порядка:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (214)$$

во всѣхъ точкахъ площади сѣченія и дифференціальному уравненію съ частными производными перваго порядка (213) на контурѣ сѣченія призмы.

Дифференціальному уравненію (214) удовлетворяютъ дѣйствительная и мнимыя части всякой функціи отъ комплексной перемѣнной $(x + yi)$. Возьмемъ мнимую часть какой либо такой функціи за w, а дѣйствительную часть означимъ черезъ ψ, т. е., пусть:

$$F(x + yi) = \psi(x, y) + iw(x, y),$$

гдѣ F произвольная функція.

Какъ извѣстно, по свойству функцій отъ комплексной перемѣнной:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \ \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

Такъ какъ функція w на контурѣ сѣченія должна удовлетворять уравненію (213), то функція ψ на томъ же контурѣ должна удовлетворять слѣдующему дифференціальному уравненію:

$$-\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + \alpha y\right) \cos (н, X) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \alpha x\right) \cos (н, У) = 0.$$

Означимъ черезъ s направленіе по контуру сѣченія, означенное на чертежѣ 22-мъ оперенною стрѣлкою, и условимся подъ этою буквою понимать также направленія касательныхъ, проведенныхъ изъ точекъ A контура къ его обводу въ такую сторону, чтобы направленіе касательной расположено было относительно направленія нормали $н$ такимъ же образомъ, какъ положительная ось $У$-овъ расположена относительно положительной оси X-овъ.

При этомъ условіи очевидно существуетъ слѣдующая зависимость между косинусами угловъ, составляемыхъ направленіями нормали и касательной къ контуру съ осями X-овъ и $У$-овъ:

$$\cos (н, X) = \cos (s, У) = \frac{dy}{ds}, \ \cos (н, У) = -\cos (s, X) = -\frac{dx}{ds} \ldots \textbf{(215)}$$

Поэтому предыдущее уравненіе, которому ψ должна удовлетворять на контурѣ, можно представить такъ:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + \alpha y\right) \frac{dy}{ds} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \alpha x\right) \frac{dx}{ds} = 0,$$

или же, если представить себѣ, что координаты точекъ контура выражены въ функціи отъ s, то это уравненіе можно будетъ представить такъ:

$$\frac{d\left(\psi + \frac{\alpha}{2} r^2\right)}{ds} = 0,$$

гдѣ $r^2 = x^2 + y^2$. Отсюда слѣдуетъ, что на контурѣ сѣченія функція $\psi(x, y) + \frac{\alpha}{2}(x^2 + y^2)$ должна быть равна нѣкоторой постоянной; пусть C есть эта постоянная.

Означимъ функцію $\psi + \frac{\alpha}{2} r^2$ для краткости черезъ $\varphi (x, y)$ или просто черезъ φ.

Напряженія T_1, T_2 выразятся въ производныхъ этой функціи:

$$T_1 = K\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \ T_2 = -K\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

и поэтому формулы (212) получатъ теперь слѣдующій видъ:

$$X_n = -K\frac{\partial \varphi}{\partial y}\nu, \ У_n = K\frac{\partial \varphi}{\partial x}\nu, \ Z_n = K\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\mu - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\lambda\right) \ldots \textbf{(212, bis)}$$

Разсмотримъ распредѣленіе напряженій на площадки, проведенныя черезъ какую угодно точку M призмы.

Проведемъ черезъ эту точку поперечное сѣченіе призмы.

Какова бы ни была функція $\varphi(x, y)$, всегда можно провести черезъ M въ площади сѣченія кривую, выражаемую уравненіемъ: $\varphi(x, y) =$ постоянному; къ этой кривой черезъ точку M возстановимъ нормаль n_1 въ направленіи, опредѣляемомъ величинами слѣдующихъ косинусовъ:

$$\cos(n_1, X) = \frac{K}{T}\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \cos(n_1, У) = \frac{K}{T}\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

гдѣ T есть положительная величина, а именно:

$$T = K\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{T_1^2 + T_2^2}.$$

На площадку, имѣющую нормалью n_1, т. е. на площадку касательную къ вышесказанной кривой и притомъ параллельную оси Z-овъ, будетъ дѣйствовать напряженіе равное нулю, какъ видно изъ формулъ (212 *bis*); слѣдовательно мы имѣемъ здѣсь одинъ изъ тѣхъ случаевъ, которые разсмотрѣны были въ параграфѣ 31-мъ, когда одно изъ главныхъ напряженій равно нулю.

Вышесказанная площадка, касательная къ цилиндрической поверхности $\varphi(x, y) =$ const., заключаетъ въ себѣ двѣ другія главныя оси напряженій въ точкѣ M. Проведемъ направленіе s_1, касательное къ кривой $\varphi =$ const. въ точкѣ M и притомъ въ такую сторону, чтобы было:

$$\cos(s_1, X) = -\cos(n_1, У) = \frac{T_2}{T}, \quad \cos(s_1, У) = \cos(n_1, X) = \frac{T_1}{T}.$$

Возьмемъ теперь за направленіе n_2 такое, которое составляетъ съ осью Z-овъ и направленіемъ s_1 углы въ $45°$; косинусы угловъ, составляемыхъ этимъ направленіемъ съ осями координатъ будутъ равны:

$$\cos(n_2 X) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(s_1, X) = \frac{T_2}{T}\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{K}{T\sqrt{2}}\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

$$\cos(n_2 У) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(s_1, У) = \frac{T_1}{T}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{K}{T\sqrt{2}}\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \cos(n_2 Z) = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

по формуламъ (212, *bis*) окажется, что на площадку, имѣющую нормалью n_2, будетъ дѣйствовать напряженіе, имѣющее слѣдующія проэкціи:

$$X(n_2) = -\frac{K}{\sqrt{2}}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = T\cos(n_2 X),$$

$$У(n_2) = \frac{K}{\sqrt{2}}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = T\cos(n_2 У),$$

$$Z(n_2) = \frac{K}{\sqrt{2}}\frac{T}{K} = T\cos(n_2 Z);$$

это значитъ, что направленіе n_2 есть главная ось напряженія въ точкѣ M, соотвѣтствующая нормальному *натяженію* T на площадку перпендикулярную къ n_2.

Если же возьмемъ площадку съ нормалью n_3, наклоненную къ оси Z-овъ подъ угломъ въ 45°, а къ направленію s_1 подъ угломъ въ 135°, то найдемъ, что это направленіе n_3 есть направленіе другой главной оси, соотвѣтствующей нормальному *давленію* на площадку перпендикулярную къ n_3.

Пусть направленіе n_1, изображенное на чертежѣ 23-мъ, есть направленіе нормали, возстановленное къ кривой $\varphi = C$ изъ точки M въ сторону возрастающихъ значеній C, тогда s_1 направлено такъ, какъ изображено на чертежахъ 23-мъ и 24-мъ. Направленія Mn_2 и Mn_2', изображенныя на чертежѣ 24-мъ, будутъ направленіями главныхъ натяженій, а направленія Mn_3 и Mn_3'— направленіями главныхъ давленій.

Если точка M есть одна изъ точекъ A боковой поверхности призмы, то кривая $\varphi = C$ есть самый контуръ сѣченія и направленіе n_1 есть направленіе n наружной нормали къ контуру; тамъ, на наружной поверхности, главное натяженіе и давленіе заключаются въ касательной плоскости къ боковой поверхности и притомъ, такъ какъ s_1 направлено въ сторону закручиванія призмы, то главная ось натяженій n_2 направлена въ ту сторону, куда наклоняются при крученіи волокна, бывшія параллельными оси призмы.

Такъ какъ главныя напряженія суть равныя между собою натяженія и давленія, то эллипсъ напряженій есть кругъ, а *кривыя направленій* — равнобочныя гиперболы.

Площадки, нормальныя къ поверхности $\varphi = C$ и проведенныя черезъ касательную s_1, а также и тѣ нормальныя къ поверхности $\varphi = C$ площадки, которыя параллельны оси Z-овъ, испытываютъ тангенціальныя напряженія величины T. На чертежѣ 25-мъ изображены: кругъ напряженій точки M, гиперболы направленій нормалей площадокъ, испытывающихъ натяженія (сплошною чертою) и гиперболы направленій нормалей площадокъ, испытывающихъ давленія (пунктиромъ). Кромѣ этого стрѣлками изображены направленія тангенціальныхъ напряженій дѣйствующихъ на части вещества, прилежащія къ ассимптотическимъ площадкамъ.

Величина T можетъ имѣть различныя величины въ различныхъ точкахъ одного и того же сѣченія и въ различныхъ точкахъ одной и той же кривой линіи $\varphi = C$.

На основаніи нижеслѣдующей теоремы можно показать, что T можетъ имѣть наибольшія значенія только на контурѣ сплошнаго сѣченія призмы.

Теорема. Если $f(x, y)$ есть сплошная функція внутри площади, ограниченной замкнутымъ контуромъ, то:

$$\iint\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dxdy = \int\frac{\partial f}{\partial n}\,ds \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (216)$$

гдѣ лѣвый интегралъ распространенъ по всей площади, а правый взятъ по всему контуру въ такомъ направленіи, идя по которому будемъ имѣть площадь по правую руку; производная отъ f по n имѣетъ слѣдующее значеніе:

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos(n, X) + \frac{\partial f}{\partial y}\cos(n, Y);$$

здѣсь n есть наружная нормаль.

Эта теорема можетъ быть доказана при помощи формулъ преобразованія $(16, a)$ и $(16, b)$ § 10-го, примѣнивъ ихъ къ объему прямаго цилиндра, имѣющаго основаніемъ ту площадь на плоскости XY, объ которой идетъ рѣчь въ доказываемой теоремѣ, а высотою — какую либо длину h. Подставимъ въ формулѣ $(16, a)$ $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ вмѣсто f, а въ формулѣ $(16, b)$ производную $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ вмѣсто f; такъ какъ ϕ есть функція отъ x и y, то можно будетъ въ обѣихъ частяхъ обоихъ равенствъ произвести интегрированіе по z отъ нуля до h и затѣмъ сократить на h обѣ части равенствъ. По сложеніи равенствъ мы тогда и получимъ формулу (215).

При такомъ доказательствѣ этой теоремы остается повидимому невыясненнымъ, почему направленіе s должно считать положительнымъ въ указанную выше сторону. Это обстоятельство объяснится, если примемъ въ разсчетъ, что площадь dS въ формулахъ (16) есть величина положительная и проэкція ея на плоскость YZ, т. е. $dydz$ есть также величина положительная когда нормаль n составляетъ острый уголъ съ осью X-овъ. Въ настоящемъ случаѣ площадь hds должна быть величиною положительною и проэкція ея на плоскость YZ, т. е. hdy должна быть величиною положительною, когда нормаль n составляетъ острый уголъ съ осью X-овъ; стало быть при $\cos(n, X)$ большемъ нуля отношеніе $\frac{dy}{ds}$ должно быть положительнымъ, а это можетъ быть только тогда, когда направленіе s считается положительнымъ въ сторону, означенную оперенною стрѣлкою на чертежѣ 26-мъ.

Изъ равенства (215) слѣдуетъ, что если сумма вторыхъ производныхъ функціи ϕ имѣетъ положительныя значенія во всѣхъ точкахъ площади, ограниченной какою либо замкнутою кривою линіею, то

$$\int \frac{\partial \phi}{\partial n} ds > 0,$$

гдѣ интегралъ распространенъ по контуру этой кривой въ такомъ направленіи, какъ объяснено выше.

Если $\phi(x, y)$ есть сплошная функція внутри нѣкоторой площади, имѣющая въ какой либо точкѣ ея B наибольшее значеніе, то всегда можно окружить эту точку B такою замкнутою кривою линіею, во всѣхъ точкахъ которой производная $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ имѣетъ величины отрицательныя; для этой замкнутой кривой линіи:

$$\int \frac{\partial \phi}{\partial n} ds < 0.$$

Слѣдовательно, если во всѣхъ точкахъ площади, ограниченной замкнутымъ контуромъ, сумма:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$$

имѣетъ положительныя значенія, то функція ϕ не можетъ имѣть maximum'а внутри этой площади.

Составимъ выраженіе для суммы вторыхъ производныхъ отъ T^2; окажется, что:

$$\frac{\partial^2 T^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T^2}{\partial y^2}=2K^2\left[\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)^2\right],\ldots\ldots\ldots(217)$$

такъ какъ:

$$\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}+\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\partial y^2}\ \text{и}\ \frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3}$$

равны нулю потому что:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=2\alpha.$$

Изъ того, что сумма вторыхъ производныхъ отъ T^2, какъ видно изъ (217), есть величина положительная, слѣдуетъ, что T^2 не можетъ имѣть maximum'а внутри площади сѣченія, ограниченной замкнутымъ контуромъ. Поэтому *наибольшее значеніе* T^2 *находится гдѣ либо на контурѣ сѣченія призмы.*

Такимъ образомъ мы видимъ, что *опаснѣйшія мѣста, въ которыхъ тангенціальная сила T достигаетъ наибольшей величины, могутъ находиться только на боковой поверхности призмы.*

Поверхность каждаго поперечнаго сѣченія призмы, бывшаго плоскимъ при предварительномъ состояніи призмы, въ деформированномъ состояніи выразится уравненіемъ, которое получится по исключеніи x и y изъ трехъ равенствъ:

$$\mathrm{x}=x-\alpha yz,\ \mathrm{y}=y+\alpha xz,\ \mathrm{z}=z+w\,(x,\,y).$$

А если взять новыя оси Ξ и Υ, повернувшіяся на ничтожно-малый уголъ αz вмѣстѣ съ сѣченіемъ, и пренебречь высшими степенями α, то уравненіе будетъ: $\mathrm{z}=z+w\,(\xi,\,\eta)$.

Поверхность эта *антикластическая* во всѣхъ своихъ точкахъ, то есть *полная кривизна* во всѣхъ ея точкахъ отрицательная.

Въ самомъ дѣлѣ, произведеніе радіусовъ кривизны R_1 и R_2 главныхъ нормальныхъ сѣченій какой либо поверхности $\mathrm{z}=f\,(x,\,y)$ выражается, какъ извѣстно, такъ:

$$R_1R_2=\frac{(1+p^2+q^2)^2}{rt-s^2},$$

гдѣ:

$$p=\frac{\partial f}{\partial x},\ q=\frac{\partial f}{\partial y},\ r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ s=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\ t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Въ настоящемъ случаѣ $f=w\,(x,\,y)$ и $t=-r$, а потому выраженіе произведенія R_1R_2 будетъ имѣть знаменателемъ величину отрицательную, а именно: $(-(r^2+s^2))$.

Для того, чтобы сообщить закручиваніе призмѣ, надо приложить къ элементамъ оконечностей ея слѣдующія напряженія:

Основаніе призмы, на которомъ $\cos(nZ)=+1$.	Основаніе призмы, на которомъ $\cos(nZ)=-1$.
$X=T_2,\ Y=T_1,\ Z=0$	$X=-T_2,\ Y=-T_1,\ Z=0.$

Главный моментъ вокругъ оси Z-овъ тангенціальныхъ напряженій, которыя должно приложить къ концу $\cos(н, Z) = \pm 1$, будетъ равенъ:

$$L = K\iint\left(x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + y\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dxdy, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (218)$$

гдѣ интегралъ распространенъ по всей площади основанія.

Такая же совокупность прямо-противоположныхъ напряженій должна быть приложена къ другому основанію призмы.

Все вышесказанное примѣнимъ къ слѣдующимъ примѣрамъ и частнымъ случаямъ.

1. Возьмемъ $F(x + yi) = A(x + yi)^2$, гдѣ A постоянная; тогда $w = 2Axy$, $\psi = A(x^2 - y^2)$.

Уравненіе контура:

$$\left(A + \frac{\alpha}{2}\right)x^2 + \left(\frac{\alpha}{2} - A\right)y^2 = B,$$

гдѣ B другая постоянная. Это уравненіе есть уравненіе эллипса съ полуосями a и b если:

$$a^2 = \frac{B}{A + \frac{\alpha}{2}}, \quad b^2 = \frac{B}{\frac{\alpha}{2} - A}.$$

Опредѣливъ отсюда A въ α, a и b и подставивъ въ ψ, найдемъ:

$$A = -\frac{\alpha}{2}\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \alpha\frac{b^2x^2 + a^2y^2}{a^2 + b^2},$$

$$T_1 = 2\alpha K\frac{b^2x}{a^2 + b^2}, \quad T_2 = -2\alpha K\frac{a^2y}{a^2 + b^2},$$

$$L = 2\alpha K\iint\frac{b^2x^2 + a^2y^2}{a^2 + b^2}\,dxdy = K\alpha\frac{\pi a^3b^3}{a^2 + b^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (219)$$

α есть уголъ крученія на единицу длины цилиндра; если l есть длина призмы, то уголъ θ, на который закрутится цилиндръ закрѣпленный на одномъ концѣ и подвергнутый закручивающимъ силамъ, приложеннымъ къ другому концу и имѣющимъ моментъ L вокругъ оси Z-овъ, будетъ равенъ:

$$\theta = \frac{Ll(a^2 + b^2)}{K\pi a^3b^3} \ldots\ldots\ldots\ldots (220)$$

Опаснѣйшія точки будутъ на контурѣ, а именно тамъ, гдѣ

$$T = \frac{2\alpha K}{a^2 + b^2}\sqrt{b^4x^2 + a^4y^2} = 2\alpha K\frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}\frac{1}{D}$$

имѣетъ наибольшую величину; D означаетъ разстояніе отъ центра эллипса касательной, проведенной къ нему черезъ точку (x, y) его контура. Величина T наибольшая тамъ, гдѣ D наименьшая, т. е. на концахъ малой полуоси.

Вдоль по производящимъ, проходящимъ черезъ концы малыхъ осей поперечныхъ сѣченій эллиптическаго цилиндра, тангенціальное срѣзывающее напряженіе имѣетъ наибольшую величину чѣмъ гдѣ либо въ другихъ частяхъ цилиндра; тамъ оно равно:

$$2\alpha K \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}.$$

Если начнетъ происходить разрушеніе скручиваемаго цилиндра, то оно начнется съ расщепленія вдоль по этимъ производящимъ.

Чтобы дать понятіе о видѣ искривленной поверхности сѣченія цилиндра, опредѣлимъ видъ кривыхъ линій, образующихся на пересѣченіяхъ этой поверхности съ плоскостями, перпендикулярными къ оси призмы; эти кривыя называются топографическими линіями.

Пересѣченіе поверхности $\mathrm{z} - z = 2A\xi\eta$ плоскостью $\mathrm{z} = z$, проведенною черезъ центръ эллипса, будетъ состоять изъ двухъ прямыхъ: $\eta = 0$, $\xi = 0$, т. е. осей эллипса (черт. 27).

При $(\mathrm{z} - z)$, равныхъ положительной величинѣ h, получаемъ равнобочную гиперболу:

$$-h = \alpha \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \xi\eta,$$

расположенную въ углахъ $\Upsilon\overline{\Xi}$ и $\overline{\Upsilon}\Xi$ (черт. 27).

При $(\mathrm{z} - z)$, равныхъ отрицательной величинѣ $(-h)$, получаемъ равнобочную гиперболу:

$$h = \alpha \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \xi\eta,$$

расположенную въ квадрантахъ $\Xi\Upsilon$ и $\overline{\Xi}\overline{\Upsilon}$.

Отсюда слѣдуетъ, что площадь искривленнаго сѣченія, раздѣляемая главными діаметрами $\overline{\Xi}\Xi$ и $\overline{\Upsilon}\Upsilon$ эллипса на четыре сектора, выпукла къ положительной оси Z-овъ въ секторахъ $\overline{\Xi}\Upsilon$ и $\overline{\Upsilon}\Xi$ и вогнута въ двухъ остальныхъ. На чертежѣ 27-мъ изображены сплошными гиперболами топографическія линіи выпуклыхъ секторовъ и пунктирными — такія же линіи вогнутыхъ секторовъ.

Всѣ кривыя $\varphi = C$ суть эллипсы, подобные наружному.

2. Возьмемъ $F = A\,(x + yi)^3$; тогда:

$$w = A\,(3x^2y - y^3) = Ar^3 \sin 3\theta,\ \psi = A\,(x^3 - 3xy^2) = Ar^3 \cos 3\theta.$$

Контурами могутъ быть всякія кривыя, выражаемыя уравненіями:

$$r^3 \cos 3\theta + \frac{\alpha}{2A} r^2 = C.$$

По формѣ этого уравненія легко видѣть, что каждая изъ такихъ кривыхъ имѣетъ одинаковые радіусы векторы при аргументахъ θ, $\theta + \frac{2\pi}{3}$, $\theta + \frac{4\pi}{3}$, гдѣ θ есть какая угодно величина, при которой r имѣетъ дѣйствительное значеніе.

Если взять за C слѣдующую величину:

$$C = 4\frac{h^3}{27},\ h = \frac{\alpha}{2A},$$

то уравненіе контура можно будетъ представить такъ:

$$r^3\cos^3\theta - \left(\frac{h}{3}\right)^3 - \frac{3}{4}r^3\cos\theta + \frac{h}{4}r^2 = 0,$$

потому что $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$; затѣмъ такъ:

$$\left(x - \frac{h}{3}\right)\left(\frac{x^2}{4} + \frac{xh}{3} + \frac{h^2}{9} - \frac{3}{4}y^2\right) = 0,$$

гдѣ $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Теперь уже видно, что первая часть этого уравненія разлагается на три линейные множителя, а потому контуръ состоитъ изъ трехъ прямыхъ линій:

$$x = \frac{h}{3},\ \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}y = -\frac{h}{3},\ \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y = -\frac{h}{3},$$

образующихъ равносторонній треугольникъ abc (черт. 28), высота котораго равна h.

Внутри площади этого треугольника:

$$\varphi = \frac{\alpha}{2h}\left(x^3 - 3xy^2 + h(x^2 + y^2)\right),$$

$$x\frac{d\varphi}{dx} + y\frac{d\varphi}{dy} = \frac{\alpha}{2h}\left(3r^3\cos 3\theta + 2hr^2\right)$$

$$L = K\alpha\int\left(\frac{r^4}{4} + \frac{3}{10}\frac{r^5}{h}\cos 3\theta\right)d\theta;$$

такъ какъ на контурѣ:

$$r^3\cos 3\theta = 4\left(\frac{h}{3}\right)^3 - hr^2$$

и такъ какъ затѣмъ можно положить $r = (h : 3\cos\theta)$ и интегрировать шесть разъ въ предѣлахъ отъ $\theta = 0$ до $\theta = \frac{\pi}{3}$, то получимъ:

$$L = \frac{4K\alpha h^4}{15.3^2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos^2\theta} - \frac{1}{8\cos^4\theta}\right)d\theta = \frac{K\alpha h^4}{15\sqrt{3}} \ldots\ldots\ldots\ (221)$$

Отсюда, по величинѣ момента закручивающихъ силъ, опредѣлимъ уголъ закручиванія α на единицу длины.

Напряженія выразятся такъ:

$$T_2 = \frac{K\alpha}{2h}\, 2\,(3xy - hy),\quad T_1 = \frac{K\alpha}{2h}\,(3x^2 - 3y^2 + 2hx)$$

$$T^2 = \frac{K^2\alpha^2}{4h^2}\,[4h^2r^2 + 9r^4 + 12h\,(x^3 - 3xy^2)].$$

Вслѣдствіе существующей между x и y зависимости на контурѣ, T выразится на немъ такъ:

$$T = \frac{K\alpha}{2h}\left(\frac{4}{3}h^2 - 3r^2\right).$$

Это выраженіе будетъ наибольшимъ при $9r^2 = h^2$, то есть въ серединахъ реберъ, гдѣ $2T = K\alpha h$, и равно нулю въ вершинахъ треугольника.

Уравненія топографическихъ линій — слѣдующія:

$$r^3 \sin 3\theta = \text{const}.$$

Линія $r^3 \sin 3\theta = 0$ состоитъ изъ шести биссекторовъ угловъ. Выпуклые секторы чередуются съ вогнутыми (см. черт. 28).

Уравненія кривыхъ $\varphi = C\varkappa^2$, гдѣ $\varkappa^2$ не болѣе единицы, а C равно $(4h^3 : 27)$, можно представить такъ:

$$\frac{h^3}{r^3} - \frac{27}{4\varkappa^2}\frac{h}{r} - \frac{27}{4\varkappa^2}\cos 3\theta = 0$$

и затѣмъ рѣшить относительно r; для этого положимъ:

$$\frac{h}{r} = \frac{3}{\varkappa}\cos\omega,$$

тогда изъ уравненія окажется, что $\cos 3\omega = \varkappa \cos 3\theta$, а потому уравненіе каждой кривой, на которой $\varkappa$ имѣетъ постоянную величину, меньшую единицы, можно написать такъ:

$$r = \frac{h\varkappa}{3}\,\frac{1}{\cos\frac{1}{3}(\arccos(\varkappa\cos 3\theta))}.$$

Каждая изъ этихъ кривыхъ есть замкнутый контуръ вида, изображеннаго на чертежѣ 29-мъ; для каждаго изъ этихъ контуровъ задача о крученіи можетъ быть рѣшена также какъ и для треугольника.

3. Возьмемъ $F = A\,(x + yi)^4$.

$$\psi = Ar^4\cos 4\theta = A\,(x^4 - 6x^2y^2 + y^4),$$

$$w = Ar^4\sin 4\theta = 4A\,(x^2 - y^2)\,xy,$$

...ложимъ $2A$ равнымъ $(-a\alpha)$ и разсмотримъ различные виды замкнутыхъ контуровъ, ...ражаемыхъ равенствами:

$$\frac{\alpha}{2}(r^2 - ar^4 \cos 4\theta) = C$$

...гда $(2C:\alpha)$ положимъ равнымъ $(1-a)$.

Рѣшивъ это уравненіе относительно $(1:r)$, мы получимъ слѣдующее выраженіе:

$$\frac{\sqrt{2(1-a)}}{r} = \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - 4a(1-a)\cos 4\theta}} \quad \text{.........} \quad \textbf{(222)}$$

Если a есть положительная дробь не большая единицы, то $(1-a)$ будетъ вели...на положительная, произведеніе $4a(1-a)$ будетъ дробь меньшая единицы, потому ...то $1-4a(1-a)$, равное $(1-2a)^2$, есть величина положительная; поэтому выра...женіе $(1-4a(1-a)\cos 4\theta)$, которое назовемъ черезъ P^2, будетъ положительнымъ ...для всѣхъ аргументовъ θ.

Вмѣстѣ съ тѣмъ очевидно, что при такихъ значеніяхъ a выраженіе P получаетъ ...значенія большія единицы для всѣхъ тѣхъ угловъ, при которыхъ $\cos 4\theta < 0$. По...этому всѣ кривыя этой категоріи имѣютъ замкнутую часть, выражаемую равенствомъ

$$\frac{\sqrt{2(1-a)}}{r} = \sqrt{1+P}$$

...и незамкнутыя части, выражаемыя равенствомъ.

$$\frac{\sqrt{2(1-a)}}{r} = \sqrt{1-P}.$$

Замкнутыя части этихъ кривыхъ пересѣкаютъ оси X-овъ и Y-овъ въ слѣдую...щихъ разстояніяхъ отъ начала координатъ: тѣ, для которыхъ a не болѣе 0,5, въ ...разстояніи $r=1$, а тѣ, для которыхъ a болѣе половины, въ разстояніяхъ равныхъ ...$(\sqrt{1-a}:\sqrt{a})$.

При a равномъ нулю, замкнутая часть кривой есть кругъ радіуса равнаго еди...ницѣ. Замкнутыя кривыя для параметровъ a отъ 0 до 0,5 (нѣкоторыя изъ нихъ изо...бражены на чертежѣ 30-мъ) всѣ проходятъ черезъ точки пересѣченія этого круга съ ...осями координатъ. Кривая, соотвѣтствующая параметру $a=0{,}4$, пересѣкаетъ напра...вленія $\theta = \pm 45^\circ$ въ разстояніяхъ равныхъ $(1:\sqrt{2})$ отъ центра; если построить ...квадратъ, имѣющій вершины въ вышесказанныхъ четырехъ точкахъ, то окажется, что ...эта кривая $(a=0{,}4)$ касается къ серединамъ сторонъ его и по своему виду весьма по...хожа на него.

При a равномъ 0,5 замкнутая часть кривой образуется изъ частей двухъ гипер...болъ:

$$(1 \pm \sqrt{2})\, r^2 \cos^2\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + (1 \mp \sqrt{2})\, r^2 \sin^2\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

...съ полуосями: $(1+\sqrt{2})$ и $(\sqrt{2}-1)$, дѣлящими углы между осями X и Y попо...ламъ; эти гиперболы проведены толстою чертою на чертежѣ 30-мъ.

Если взять a отрицательнымъ $(-a_1)$, то P^2 будетъ положительною величиною для всякихъ θ при такихъ величинахъ a_1, при которыхъ положительное количество $4a_1(1+a_1)$ есть дробь не большая единицы; для этого надо, чтобы a_1 было не больше $(\sqrt{2}-1)$, дѣленнаго на два. Замкнутыя части всѣхъ кривыхъ съ такими параметрами проходятъ черезъ точки пересѣченія круга $r=1$ съ осями координатъ.

Замкнутая часть кривой $a=((1-\sqrt{2}):2)$ состоитъ изъ частей двухъ гипербол

$$(1\pm\sqrt{2})\cos^2\theta+(1\mp\sqrt{2})\sin^2\theta=\frac{1+\sqrt{2}}{r^2}$$

съ полуосями: 1 и $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$, расположенными по осямъ координатъ; эти гиперболы касаются къ кругу $r=1$.

Между криволинейнымъ четвероугольникомъ, образуемымъ этими гиперболами, и кругомъ $r=1$ заключаются замкнутыя части всѣхъ кривыхъ, параметры a которыхъ отрицательны, но не менѣе параметра гиперболъ. Кривая съ параметромъ $a=-0,2$ пересѣкаетъ направленія $\theta=\pm 45^\circ$ въ разстояніяхъ равныхъ $\sqrt{2}$ отъ центра; она такъ же похожа на квадратъ, какъ и кривая $a=0,4$.

Для всѣхъ этихъ замкнутыхъ контуровъ φ выражается одинаковою формулою:

$$\varphi=\frac{\alpha}{2}\left(x^2+y^2-a\left(x^4-6x^2y^2+y^4\right)\right).$$

Если радіусъ круга $a=0$ равенъ R, то надо положить C равнымъ $\alpha R^4(1-a)$ дѣленному на 2 и умножить r^2 на R^2, такъ что уравненіе контура должно быть:

$$R^2r^2-r^4a\cos 4\theta=R^4(1-a)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\mathbf{(223)}$$

Такъ какъ

$$x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\alpha\left(r^2R^2-2ar^4\cos 4\theta\right)$$

то моментъ закручивающихъ силъ выразится такъ:

$$L=K\alpha\iint\left(r^2R^2-2ar^4\cos 4\theta\right)rdrd\theta=K\alpha\int\left(\frac{r_1^4}{4}R^2-a\frac{r_1^6}{3}\cos 4\theta\right)d\theta,$$

гдѣ r_1 суть радіусы векторы точекъ контура, а потому:

$$\frac{r_1^4}{4}R^2-a\frac{r_1^6}{3}\cos 4\theta=\frac{R^2}{3}\left(r_1^2R^2(1-a)-\frac{r_1^4}{4}\right)=$$

$$=\frac{R^6(1-a)^2}{3}\,\frac{1+2P}{(1+P)^2};\quad P^2=1-4a(1-a)\cos 4\theta.$$

$$L=\frac{8K\alpha}{3}R^6(1-a)^2\left[2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{1+P}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{(1+P)^2}\right]\ldots\ldots\ldots\mathbf{(224)}$$

По этой формулѣ должно вычислить α для даннаго L.

Опаснѣйшія точки на контурѣ здѣсь суть тѣ, въ которыхъ величина:

$$T^2 = K^2\alpha^2 (4a^2 r_1^{\,6} - 3r_1^{\,2} R^4 + 4R^6 (1 - a)) \ldots\ldots\ldots (225)$$

имѣетъ наибольшее значеніе.

Обратимъ здѣсь вниманіе на то обстоятельство, что въ вершинахъ четыреугольниковъ, образуемыхъ гиперболами, напряженіе T равно нулю; въ самомъ дѣлѣ, при $a = 0{,}5$ и для $r_1 = R$, а также при $a = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$ и для $r_1^{\,2} = R^2 (1 + \sqrt{2})$, выраженіе (225) обращается въ нуль.

Всѣ эти контуры четвертаго порядка болѣе или менѣе отличаются отъ прямолинейнаго квадрата.

Вопросъ о крученіи призмы съ квадратнымъ или прямоугольнымъ сѣченіемъ можетъ быть рѣшенъ при помощи теоремы Фурье (относительно разложенія періодическихъ функцій въ ряды, расположенные по синусамъ и косинусамъ кратныхъ дугъ), причемъ рѣшеніе выразится въ видѣ рядовъ.

4. Для рѣшенія вопроса о крученіи призмы, сѣченіе которой есть прямоугольникъ длины $2a$ и ширины $2b$, положимъ

$$F(x + yi) = \Phi(x + yi) - \frac{\alpha}{2}(x + yi)^2$$

и, разложивъ $\Phi(x + yi)$ на мнимую и дѣйствительную части $W(x, y)$ и $\Psi(x, y)$, возьмемъ: $\psi = \Psi + \frac{\alpha}{2}(y^2 - x^2)$, $w = W - \alpha xy$.

Функція Ψ должна быть такова, чтобы на контурѣ прямоугольника φ равнялось постоянной C, за которую возьмемъ $b^2\alpha$.

Слѣдовательно, для всякихъ y, при x равномъ $+a$ или $(-a)$ должно быть:

$$\Psi(\pm a, y) + \frac{\alpha}{2}(y^2 - a^2) + \frac{\alpha}{2}(a^2 + y^2) = \alpha b^2$$

и, для всякихъ x, при y равномъ $+b$ или $(-b)$ должно быть:

$$\Psi(x, \pm b) + \frac{\alpha}{2}(b^2 - x^2) + \frac{\alpha}{2}(x^2 + b^2) = \alpha b^2.$$

Слѣдовательно функція Ψ должна удовлетворять слѣдующимъ требованіямъ:

Для всякаго y, заключающагося въ предѣлахъ отъ $y = -b$ до $y = +b$, должно быть:

$$\Psi(+a, y) = \alpha(b^2 - y^2),\ \ \Psi(-a, y) = \alpha(b^2 - y^2) \ldots\ldots (226)$$

Для всякаго x, заключающагося въ предѣлахъ отъ $x = -a$ до $x = +a$, должно быть:

$$\Psi(x, +b) = 0,\ \ \Psi(x, -b) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (227)$$

По значенію функціи φ, имѣя въ виду симметрію площади сѣченія относительно осей координатъ, можно судить, что Ψ должна быть четною функціею, какъ относи-

тельно x, такъ и относительно y; обратимъ теперь вниманіе на четность этой функціи относительно y, т. е. на то, что она должна имѣть равныя значенія для y_1 и для $-y_1$, при томъ же x.

По теоремѣ Фурье всякая четная функція отъ какой либо перемѣнной внутри данныхъ предѣловъ можетъ быть выражена въ видѣ ряда расположеннаго по косинусамъ дугъ кратныхъ отъ этой перемѣнной; такъ, напримѣръ, разность (b^2-y^2) въ предѣлахъ отъ $y=-b$ до $y=+b$ можетъ быть разложена по косинусамъ дугъ кратныхъ отъ $\frac{\pi y}{2b}$:

$$b^2-y^2=C_1\cos\frac{\pi y}{2b}+C_3\cos 3\frac{\pi y}{2b}+C_5\cos 5\frac{\pi y}{2b}+\ldots\ldots$$

Здѣсь оставлены только члены нечетной кратности, такъ какъ очевидно, что членовъ четной кратности не должно быть, если функція должна обращаться въ нуль при $y=\pm b$.

Для опредѣленія величины котораго либо изъ коэфиціентовъ, напримѣръ C_{2j+1}, должно умножить обѣ части написаннаго равенства на

$$\cos(2j+1)\frac{\pi y}{2b}\,dy=\cos(2j+1)\,\eta dy$$

и взять интегралъ отъ обѣихъ частей въ предѣлахъ отъ $y=-b$ до $+b$; тогда интегралы, заключающіе произведенія косинусовъ не одинаковой кратности, окажутся равными нулю и во второй части останется только одинъ интегралъ, помноженный на C_{2j+1}; этотъ интегралъ окажется равнымъ b, а потому:

$$\int_{-b}^{+b}(b^2-y^2)\cos(2j+1)\,\eta dy=bC_{2j+1}.$$

Интегрируя интегралъ первой части по частямъ три раза, найдемъ, что:

$$C_{2j+1}=(-1)^j\frac{4b^2}{(2j+1)^3}\left(\frac{2}{\pi}\right)^3,$$

а потому (b^2-y^2) выражается въ сказанныхъ предѣлахъ слѣдующимъ рядомъ:

$$b^2-y^2=4b^2\left(\frac{2}{\pi}\right)^3\left\{\cos\eta-\frac{1}{3^3}\cos 3\eta+\frac{1}{5^3}\cos 5\eta-\ldots.\right\}\ldots(228)$$

Функція Ψ должна быть тоже четною функціею отъ y и тоже должна обращаться въ нуль при $y=\pm b$ какъ видно изъ (227), а потому она должна въ предѣлахъ отъ $y=-b$ до $y=+b$ выражаться въ видѣ ряда:

$$\Psi=X_1\cos\eta+X_3\cos 3\eta+X_5\cos 5\eta+\ldots\ldots,$$

гдѣ коэфиціенты суть функціи отъ x, видъ которыхъ предстоитъ теперь опредѣлить.

Функція Ψ должна удовлетворять дифференціальному уравненію:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0$$

при всякихъ y, а потому функціи X должны удовлетворять слѣдующимъ дифференціальнымъ уравненіямъ: напримѣръ X_{2j+1} должна удовлетворять уравненію:

$$\frac{\partial^2 X_{2j+1}}{\partial x^2} - (2j+1)^2 \left(\frac{\pi}{2b}\right)^2 X_{2j+1} = 0.$$

Этому уравненію удовлетворяетъ слѣдующая функція съ двумя произвольными постоянными A_{2j+1} и B_{2j+1}:

$$X_{2j+1} = A_{2j+1}\, e^{(2j+1)\xi} + B_{2j+1}\, e^{-(2j+1)\xi}, \quad \xi = \frac{\pi x}{2b}.$$

По условію же (226), функція Ψ при $x = \pm a$ должна быть равна $\alpha(b^2 - y^2)$ при всякихъ y въ сказанныхъ предѣлахъ; изъ этого слѣдуетъ, что при $x = +a$ и при $x = -a$ коэфиціенты у косинусовъ одинаковыхъ дугъ въ разложеніи функціи Ψ и въ рядѣ (228) должны быть равны, т. е.:

$$+ A_{2j+1}\, e^{(2j+1)k} + B_{2j+1}\, e^{-(2j+1)k} = (-1)^j \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \frac{4\alpha b^2}{(2j+1)^3}$$

$$+ A_{2j+1}\, e^{-(2j+1)k} + B_{2j+1}\, e^{(2j+1)k} = (-1)^j \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \frac{4\alpha b^2}{(2j+1)^3}, \quad k = \frac{\pi a}{2b}$$

откуда слѣдуетъ:

$$A_{2j+1} = B_{2j+1} = 4\alpha \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \frac{b^2}{(2j+1)^3} \, \frac{(-1)^j}{2\cos(2j+1)ki}.$$

Слѣдовательно:

$$\Psi = \alpha \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 4b^2 \sum \frac{(-1)^j}{(2j+1)^3} \, \frac{\cos(2j+1)\xi i}{\cos(2j+1)ki} \cos(2j+1)\eta \; \ldots\ldots \mathbf{(229)}$$

Такъ какъ это есть дѣйствительная часть слѣдующей функціи отъ комплексной перемѣнной $(x + yi)$:

$$\Phi = \alpha \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 4b^2 \sum \frac{(-1)^j}{(2j+1)^3} \, \frac{\cos(2j+1)\, i\,(\xi + i\eta)}{\cos(2j+1)\, ik}$$

то взявъ за W мнимую часть этой функціи, заключаемъ, что

$$w = -\alpha xy - \alpha \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 4b^2 \sum \frac{(-1)^j}{(2j+1)^3} \, \frac{i \sin(2j+i)\, i\xi}{\cos(2j+1)\, ik} \sin(2j+1)\eta \, .. \mathbf{(230)}$$

Моментъ закручивающихъ силъ выразится формулою:

$$L = K\int_{-a}^{+a}\int_{-b}^{+b}\left(x\frac{d\varphi}{dx} + y\frac{d\varphi}{dy}\right)dxdy,\ \ \varphi = \Psi + \alpha y^2,$$

гдѣ

$$x\frac{d\varphi}{dx} + y\frac{d\varphi}{dy} = 2\alpha y^2 - \alpha\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 4b\sum\frac{(-1)^j}{(2j+1)^2}\frac{S_j}{\cos(2j+1)ik} \ldots\ldots (231)$$

$$S_j = xi\sin(2j+1)\xi i\cos(2j+1)\eta + y\sin(2j+1)\eta\cos(2j+1)\xi i.$$

Интегрируя, получимъ слѣдующее выраженіе:

$$L = K\alpha\left(\frac{8ab^3}{3} + \left(\frac{2}{\pi}\right)^4 16ab^3\sum\frac{1}{(2j+1)^4} - 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^5(2b)^4\sum\frac{\operatorname{tg}(2j+1)ik}{i(2j+1)^5}\right).$$

Интегрируя равенство (228) по y въ предѣлахъ отъ $(-b)$ до $+b$, мы найдемъ:

$$\frac{1}{6} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^4\sum\frac{1}{(2j+1)^4},$$

а потому выраженіе для L получитъ слѣдующій видъ:

$$L = K\alpha\ 16ab^3\left(\frac{1}{3} - \left(\frac{2}{\pi}\right)^5\frac{2b}{a}\sum\frac{\operatorname{tg}(2j+1)ik}{i(2j+1)^5}\right) \ldots\ldots\ldots (232)$$

Величина напряженія T въ точкахъ контура можетъ быть представлена въ видѣ дѣленнаго на a или b произведенія изъ K на выраженіе (231); послѣднее при $x = \pm a$ и $y = \pm b$ получаетъ слѣдующій видъ:

$$2\alpha b^2 - \alpha\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 4b^2\sum\frac{1}{(2j+1)^2}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (233)$$

величину же послѣдней суммы мы получимъ, взявъ производную отъ обѣихъ частей равенства (228) и положивъ въ немъ затѣмъ $y = b$; опредѣливъ величину этой суммы мы увидимъ, что выраженіе (233) равно нулю. Отсюда слѣдуетъ, что въ вершинахъ прямоугольника напряженіе равно нулю, а слѣдовательно тамъ нѣтъ и сдвиговъ.

Видъ топографическихъ линій на квадратѣ и прямоугольникѣ изображенъ на чертежахъ 31-мъ и 32-мъ.

5. Возьмемъ за $F(x + yi)$ слѣдующую сумму:

$$F(x + yi) = A(x + yi)^2 + B(x + yi)^4$$

и опредѣлимъ тѣ изъ кривыхъ:

$$\frac{\alpha r^2}{2} + Ar^2\cos 2\theta + Br^4\cos 4\theta = C,$$

которыя не только пересѣкаютъ обѣ оси координатъ, но и кромѣ того имѣютъ части, образующія замкнутую фигуру вокругъ начала координатъ.

Пусть $x = \pm a$ суть абсциссы точекъ пересѣченія кривой съ осью X-овъ и $x = \pm b$ — ординаты точекъ пересѣченія ея съ осью $У$-овъ.

Изъ уравненій:

$$\frac{\alpha a^2}{2} + Aa^2 + Ba^4 = C,\ \frac{\alpha b^2}{2} - Ab^2 + Bb^4 = C$$

если притомъ положимъ $C\,(a^2 + b^2) = \alpha\,(1 + n)\,a^2b^2$, окажется, что

$$A = -\frac{1+2n}{2}\,\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\,\alpha,\ B = \frac{n\alpha}{a^2+b^2}.$$

Представимъ теперь уравненіе контура подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\frac{4C}{r^2} = \alpha + 2A\cos 2\theta \pm \sqrt{(\alpha + 2A\cos 2\theta)^2 + 16CB\cos 4\theta}.$$

Для того, чтобы при положительномъ C контуръ со всѣхъ сторонъ былъ замкнутымъ, необходимо, чтобы подкоренная сумма была положительною при всякихъ значеніяхъ θ.

C будетъ положительнымъ при всякомъ n большемъ минусъ единицы; при θ равномъ нулю подкоренная сумма есть величина положительная, равная $4\alpha^2\left(b^2+n(a^2+b^2)\right)^2 : (a^2+b^2)^2$. Для того, чтобы это подкоренное выраженіе ни при какомъ θ не сдѣлалось отрицательнымъ, необходимо, чтобы корни уравненія:

$$\alpha^2 - 16CB + 4A\alpha\cos 2\theta + 4\,(A^2 + 8CB)\cos^2 2\theta = 0,$$

т. е. значенія $\cos 2\theta$, обращающія первую часть въ нуль, были бы мнимыми, или же большими $+1$ или меньшими (-1).

Корни этого уравненія будутъ мнимыми, если выраженіе

$$-8CB\,(\alpha^2 - 2A^2 - 16CB)$$

т. е.:

$$-\frac{8a^2b^2}{(a^2+b^2)^4}\left((a^2+b^2)^2 + 4a^2b^2\right) n\,(n+1)\left(1 - \frac{(1+2n)^2}{2}\right)$$

будетъ отрицательнымъ.

Это выраженіе будетъ отрицательнымъ при $n > 0$ и притомъ не большемъ $((\sqrt{2} - 1) : 2)$.

При $n = 0$ замкнутый контуръ есть эллипсъ съ полуосями a и b; при этомъ n, подъ корнемъ остается полный квадратъ.

При $n = ((\sqrt{2} - 1) : 2)$ подъ корнемъ также будетъ полный квадратъ, а именно:

$$\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} - \sqrt{2}\cos 2\theta\right)^2;$$

замкнутый контуръ будетъ состоять изъ частей двухъ гиперболъ, а именно изъ частей гиперболы:

$$b^2(\sqrt{2}+1)=r^2(1-\sqrt{2}\cos 2\theta),\text{ для }\cos 2\theta\text{ не бóльшихъ }\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

и изъ частей гиперболы

$$a^2(\sqrt{2}+1)=r^2(1+\sqrt{2}\cos 2\theta),\text{ для }\cos 2\theta\text{ бóльшихъ }\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

Контуры для всѣхъ промежуточныхъ n проходятъ всѣ черезъ концы полуосей эллипса $n=0$, къ которому прикасаются двѣ вышеупомянутыя гиперболы.

Контуръ $n=0{,}2$ проходитъ не только черезъ эти точки, но также и черезъ вершины прямоугольника, описаннаго около эллипса $n=0$.

8. Кромѣ этихъ контуровъ, къ которымъ указанный здѣсь пріемъ прилагается такимъ же образомъ, какъ и къ контурамъ пункта 3-го настоящаго параграфа, мы упомянемъ еще объ одномъ контурѣ, выражаемомъ слѣдующимъ уравненіемъ въ полярныхъ координатахъ:

$$\left(\frac{r}{b}\right)^2-\frac{48}{49}\frac{16}{17}\left(\frac{r}{b}\right)^4\cos 4\theta+\frac{12}{49}\cdot\frac{16}{17}\left(\frac{r}{b}\right)^8\cos 8\theta=1-\frac{36}{49}\frac{16}{17}.$$

Этотъ контуръ, изображенный на чертежѣ 33-мъ, представляетъ четыреугольникъ съ лопастями; наибольшіе радіусы векторы, при $\theta=0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2}$, равны b; наименьшіе при $\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4}$, равны половинѣ b. На чертежѣ (33-мъ) изображены топографическія линіи искривленнаго крученіемъ сѣченія, ограниченнаго этимъ контуромъ.

9. Разсмотрѣвъ вопросъ о закручиваніи призмы съ какимъ либо изъ вышеуказанныхъ контуровъ вокругъ оси, проведенной черезъ центры контуровъ, можно перейти къ вопросу о крученіи той же призмы вокругъ какой либо эксцентрической оси. Пусть $F(x+yi)$ есть какая либо функція отъ $(x+yi)$ дѣйствительная часть которой, сложенная съ $\frac{\alpha}{2}r^2$, даетъ намъ первую часть уравненія $\varphi(x,y)=C$, выражающаго нѣкоторый контуръ. Если требуется разсмотрѣть вопросъ о закручиваніи той же призмы вокругъ оси, пересѣкающей плоскость XY въ точкѣ, имѣющей координаты: $x=-a$, $y=-b$, то перенесемъ начало координатъ въ эту точку, чтобы уравненіе контура получило видъ: $\varphi((x-a),(y-b))=C$; затѣмъ возьмемъ слѣдующую функцію:

$$F(x+yi-(a+bi))-\alpha(a-bi)(x+yi)$$

дѣйствительную часть которой означимъ черезъ ψ_1, а мнимую — черезъ w_1.

Уравненіе контура будетъ тогда:

$$\frac{\alpha r^2}{2}+\psi_1=\frac{\alpha}{2}((x-a)^2+(y-b)^2)+\psi(x-a,y-b)-\frac{\alpha}{2}(a^2+b^2)=C_1.\ \mathbf{(234)}$$

гдѣ $C_1 = C - \frac{\alpha}{2}(a^2 + b^2)$, новыя же перемѣщенія параллельно оси Z-овъ выразятся такъ:

$$w_1 = w\left((x-a), (y-b)\right) + \alpha\,(bx - ay)\,, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (235)$$

гдѣ $\psi(x, y)$ и $w(x, y)$ суть дѣйствительная и мнимая часть функціи $F(x+yi)$.

Означивъ черезъ φ_1 сумму $\psi_1 + \frac{\alpha r^2}{2}$, составимъ выраженія напряженій и момента закручивающихъ силъ по общимъ формуламъ, приведеннымъ въ началѣ настоящаго параграфа; такъ какъ:

$$\varphi_1 = \varphi(x-a, y-b) - \frac{\alpha}{2}(a^2 + b^2),$$

то найдемъ, что:

$$T_1 = K\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = K\frac{\partial \varphi}{\partial x},\ T_2 = -K\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = -K\frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

т. е., *что величины напряженій и сдвиговъ при крученіи призмы вокругъ эксцентрической оси таковы же, какъ и при крученіи ея вокругъ оси симметріи на тотъ же уголъ* α.

Моментъ закручивающихъ силъ вокругъ новой оси выразится такъ:

$$L = K\iint\left(x\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + y\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)dxdy =$$

$$= K\iint\left((x-a)\frac{\partial \varphi}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)d(x-a)\,d(y-b) \quad \ldots \ldots \quad (236)$$

потому что нижеслѣдующіе интегралы, распространенные по площади основанія:

$$K\iint\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dxdy,\quad K\iint\frac{\partial \varphi}{\partial y}\,dxdy$$

должны быть равны нулю, такъ какъ если ихъ помножить на $(-l)$, гдѣ l есть длина призмы, то они представятъ величины главныхъ моментовъ внѣшнихъ напряженій вокругъ осей X-овъ и Y-овъ, а эти моменты должны быть равны нулю.

Формула (236) показываетъ, что *при томъ же моментѣ L, уголъ α закручиванія единицы длины призмы вокругъ эксцентрической оси будетъ тотъ же самый, на какой она закручивается вокругъ оси симметріи*.

Изъ формулы (235) видно, что разница между перемѣщеніями w и w_1 заключается только въ членѣ $\alpha\,(b\,(x-a) - a\,(y-b))$; уравненіе же $z = \alpha\,(bx - ay)$ есть уравненіе плоскости, проходящей черезъ начало координатъ и черезъ центръ симметріи сѣченія и нормальной къ винтовой линіи, описываемой осью симметріи призмы. Слѣдовательно, видъ искривленнаго сѣченія одинаковъ при крученіи вокругъ различныхъ осей и положеніе его относительно касательной къ кривой, образуемой осью симметріи призмы, остается одно и тоже.

§ 46. Изгибъ призмъ, одновременно съ крученіемъ и растяженіемъ или сжатіемъ.

Вопросъ объ одновременномъ изгибѣ, крученіи и вытяженіи призмъ рѣшенъ Санъ-Венаномъ подъ видомъ слѣдующей задачи.

Имѣется какое либо изотропно-упругое тѣло призматическаго или цилиндрическаго вида съ основаніями, перпендикулярными къ длинѣ призмы. Одинъ элементъ этого тѣла закрѣпленъ такимъ образомъ, что онъ не можетъ получить ни поступательнаго движенія, ни вращеній. Предполагается:

I) что на тѣло не дѣйствуютъ никакія объемныя силы,

II) что къ боковой поверхности призмы не приложено никакихъ внѣшнихъ напряженій

III) и что во всей призмѣ N_1, N_2 и T_3 равны нулю.

Требуется узнать, какія напряженія должно приложить къ основаніямъ призмы и какія деформаціи она получитъ.

Ось Z-овъ располагаемъ по оси призмы.

Въ силу предположенія III изъ выраженій (199) стр. 113 получимъ:

$$2K\varepsilon_1 + B\theta = 0,\ 2K\varepsilon_2 + B\theta = 0,\ 2g_3 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \ldots . (237)$$

отсюда, изъ первыхъ двухъ слѣдуетъ: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ и, далѣе, такъ какъ $3B = 3R - 2K$, то:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\varkappa\varepsilon_3,\ \varkappa = \frac{1}{2}\frac{3R-2K}{3R+K}; \ldots\ldots\ldots . (188)$$

поэтому:

$$N_3 = E\varepsilon_3 \ldots (238), \qquad E = 2K(1+\varkappa) = \frac{9RK}{3R+K} \ldots . (186)$$

и кубическое расширеніе единицы объема: $\theta = (1 - 2\varkappa)\varepsilon_3$.

Дифференціальныя уравненія равновѣсія даютъ:

$$\frac{\partial g_2}{\partial z} = 0, \text{ или } \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} = 0, \ldots\ldots\ldots . (238)$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial z} = 0, \text{ или } \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = 0, \ldots\ldots\ldots . (239)$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial y} + (1+\varkappa)\frac{\partial \varepsilon_3}{\partial z} = 0; \ldots\ldots\ldots . (240)$$

но такъ какъ:

$$\frac{\partial g_2}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),\ \frac{\partial g_1}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} = \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial z} = -2\varkappa\frac{\partial \varepsilon_3}{\partial z},$$

то послѣднее уравненіе можно представить еще такъ:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -2\frac{\partial \varepsilon_3}{\partial z} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \ldots\ldots\ldots (240, bis)$$

Шесть дифференціальныхъ уравненій (207), (208) стр. 117, которымъ должны удовлетворять ε и g, будутъ здѣсь (вслѣдствіе того что $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\varkappa\varepsilon_3$, $g_3 = 0$, а производныя отъ g_1 и g_2 по z равны нулю) имѣть слѣдующій видъ:

$$-\varkappa\frac{\partial^2\varepsilon_3}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_3}{\partial y^2} = 0, \ldots \mathbf{(207, 1)}, \qquad \frac{\partial^2\varepsilon_3}{\partial x^2} - \varkappa\frac{\partial^2\varepsilon_3}{\partial z^2} = 0, \ldots\ldots \mathbf{(207, 2)}$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_3}{\partial z^2} = 0, \ldots \mathbf{(207, 3)}, \qquad -\varkappa\frac{\partial^2\varepsilon_3}{\partial y\partial z} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \ldots\ldots \mathbf{(208, 1)}$$

$$-\varkappa\frac{\partial^2\varepsilon_3}{\partial z\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y}, \ldots\ldots \mathbf{(208, 2)}, \qquad \frac{\partial^2\varepsilon_3}{\partial x\partial y} = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(208, 3)}$$

гдѣ:

$$U = \frac{\partial g_1}{\partial x} - \frac{\partial g_2}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right).$$

Изъ (207, 1, 2, 3) и (208, 3) слѣдуетъ, что $\frac{\partial^2\varepsilon_3}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\varepsilon_3}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\varepsilon_3}{\partial z^2} = \frac{\partial^2\varepsilon_3}{\partial y\partial z} = 0$, а потому:

$$\varepsilon_3 = a + a_1 x + a_2 y + (b + b_1 x + b_2 y) z.$$

Далѣе, имѣя это выраженіе для ε_3, получимъ изъ (208, 1, 2) изъ (238) и (239):

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \varkappa b_2,\ \frac{\partial U}{\partial y} = -\varkappa b_1,\ \frac{\partial U}{\partial z} = 0;$$

отсюда, интегрируя и введя произвольную постоянную α:

$$U = \alpha + \varkappa(b_2 x - b_1 y),$$

или:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} = 2\alpha + 2\varkappa(b_2 x - b_1 y) \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(241)}$$

Теперь, имѣя выраженіе для ε_3, изъ (238), (239) и (240, bis) получимъ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -(a_1 + b_1 z), \ldots \mathbf{(238)}, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -(a_2 + b_2 z), \ldots\ldots \mathbf{(239)}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -2(b + b_1 x + b_2 y), \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(240)}$$

а кромѣ того имѣемъ еще третье изъ (237), т. е.:

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(237)}$$

а изъ него

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} = -\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(242)}$$

Изъ послѣднихъ дифференціальныхъ уравненій (238), (239), (240), (242), (241) и (237) предстоитъ опредѣлить u, v, w, удовлетворяющія еще слѣдующимъ условіямъ:

На боковой поверхности (наружная нормаль $н$):

$$2g_2 \cos(н, X) + 2g_1 \cos(н, У) = 0; \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(243)}$$

прочія два условія на боковой поверхности удовлетворены уже тѣмъ, что $N_1 = N_2 = 0$; далѣе, на поверхностяхъ основаній:

$$X = \pm 2g_2 K,\ \ У = \pm 2g_1 K,\ \ Z = \pm E\varepsilon_3; \ldots\ldots\ldots \mathbf{(244)}$$

а кромѣ того (условія закрѣпленія одного изъ элементовъ тѣла):

$$\text{при } x = 0,\ y = 0,\ z = 0;\ u_0 = 0,\ v_0 = 0,\ w_0 = 0, \ldots\ldots\ldots \mathbf{(245)}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 = 0,\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 = 0,\ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(246)}$$

Имѣя выраженія:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial y} = -\varkappa \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial y} = -\varkappa (a_2 + b_2 z),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x} = \varkappa \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial x} = \varkappa (a_1 + b_1 z),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = -\alpha - \varkappa (b_2 x - b_1 y)$$

и зная, что $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 = 0$, найдемъ интегрированіемъ:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\alpha z - \varkappa (a_2 x - a_1 y + b_2 z x - b_1 z y) \ldots\ldots\ldots \mathbf{(245)}$$

Имѣя выраженія: $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$ и

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial z} = -\varkappa \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial z} = -\varkappa (b + b_1 x + b_2 y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -(a_1 + b_1 z),$$

получимъ интегрированіемъ, введя произвольную постоянную β_1:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \beta_1 - a_1 z - b_1 \frac{z^2}{2} - \alpha y - \varkappa b x - \varkappa \left(b_1 \frac{(x^2 - y^2)}{2} + b_2 x y\right) \ldots \mathbf{(246)}$$

Имѣя выраженія:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} = \alpha + \varkappa (b_2 x - b_1 y),$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} = \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial z} = -\varkappa \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial z} = -\varkappa (b + b_1 x + b_2 y),$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -(a_2 + b_2 z),$$

получимъ интегрированіемъ, введя произвольную постоянную β_2:

$$\frac{\partial v}{\partial z}=\beta_2-a_2 z-b_2\frac{z^2}{2}+\alpha x-\varkappa by-\varkappa\left(b_2\frac{(y^2-x^2)}{2}+b_1 xy\right)\ldots(247)$$

Теперь имѣемъ: $\frac{\partial u}{\partial x}=\varepsilon_1=-\varkappa\varepsilon_3$ и выраженія (245) и (246) двухъ другихъ производныхъ перваго порядка отъ u. Зная, что $u_0=0$, найдемъ интегрированіемъ:

$$u=\beta_1 z-a_1\frac{z^2}{2}-b_1\frac{z^3}{6}-\alpha yz-\varkappa\left(ax+a_1\frac{(x^2-y^2)}{2}+a_2 xy\right)-$$
$$-\varkappa z\left(bx+b_1\frac{(x^2-y^2)}{2}+b_2 xy\right)\ldots.(248)$$

Потомъ, имѣемъ выраженія для трехъ производныхъ перваго порядка отъ v (потому что $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}=-\varkappa\varepsilon_3$). Зная, что $v_0=0$, получимъ интегрированіемъ:

$$v=\beta_2 z-a_2\frac{z^2}{2}-b_2\frac{z^3}{6}+\alpha xz-\varkappa\left(ay+a_1 xy+a_2\frac{(y^2-x^2)}{2}\right)-$$
$$-\varkappa z\left(by+b_1 xy+b_2\frac{(y^2-x^2)}{2}\right)\ldots(249)$$

Наконецъ еще получимъ:

$$w=z\,(a+a_1 x+a_2 y)+\frac{z^2}{2}(b+b_1 x+b_2 y)+F(x,y),\ldots.(250)$$

гдѣ $F\,(x,\,y)$ есть функція, удовлетворяющая слѣдующему дифференціальному уравненію:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=-2\,(b+b_1 x+b_2 y)\,\ldots\ldots\ldots.(240,\,3)$$

Притомъ эта функція F, на основаніи условій (245) и (246), должна удовлетворять слѣдующимъ требованіямъ:

$$\text{при } x=0,\ y=0,\ F(0,0)=0,\ \frac{\partial F}{\partial x}=0,\ \frac{\partial F}{\partial y}=0;\ldots\ldots.(251)$$

а кромѣ того на контурѣ сѣченія она должна удовлетворять дифференціальному уравненію перваго порядка (243), гдѣ:

$$2g_1=\frac{\partial F}{\partial y}+\beta_2+\alpha x-\varkappa\left(by+b_1 xy+b_2\frac{(y^2-x^2)}{2}\right)\ldots\ldots(252)$$

$$2g_2=\frac{\partial F}{\partial x}+\beta_1-\alpha y-\varkappa\left(bx+b_2 xy+b_1\frac{(x^2-y^2)}{2}\right)\ldots\ldots.(253)$$

Изъ числа постоянныхъ произвольныхъ, входящихъ въ полученныя выраженія, постоянное b можетъ быть выражено въ двухъ другихъ, b_1 и b_2. Въ самомъ дѣлѣ, такъ

какъ уравненіе (243) должно быть удовлетворено во всѣхъ точкахъ контура сѣченія, то:

$$2\int\left(g_2 \cos(н, X) + g_1 \cos(н, У)\right) ds = 0,$$

гдѣ интегралъ распространенъ по всему контуру сѣченія призмы; по теоремѣ же, приведенной на стр. 126 (216), этотъ интегралъ преобразовывается въ слѣдующій интегралъ, распространенный по площади сѣченія:

$$\iint\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - 2\varkappa\,(b + b_1\, x + b_2\, y)\right) dxdy = 0, \; \ldots\ldots \textbf{(254)}$$

вслѣдствіе же того, что функція F должна удовлетворять уравненію (240, 3), равенство (254) получаетъ слѣдующій видъ:

$$2\,(1 + \varkappa)\,(b + b_1\, x_c + b_2 y_c)\, S = 0, \; \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(255)}$$

гдѣ S — величина площади сѣченія, а x_c и y_c — координаты центра тяжести этой площади.

Если начало координатъ и закрѣпленный элементъ находятся на линіи центровъ тяжести сѣченій, то x_c и y_c равны нулю, а потому тогда и b равно нулю.

Изъ остальныхъ постоянныхъ пять, а именно: a, a_1, a_2, b_1, b_2 могутъ быть опредѣлены по величинамъ проэкцій B_x, B_y, B_z главнаго вектора и проэкцій $Л_x$, $Л_y$, главнаго момента внѣшнихъ напряженій, приложенныхъ къ свободному основанію призмы.

Изъ двухъ основаній призмы одно ($z = 0$) несвободно въ томъ отношеніи, что закрѣпленъ одинъ ничтожно-малый элементъ его, окружающій начало координатъ, прочіе же элементы этого основанія свободны; другое основаніе ($z = l$) свободно во всѣхъ своихъ частяхъ безъ исключенія.

Составимъ выраженія:

$$B_x = \iint X\, dxdy, \quad B_y = \iint У\, dxdy, \quad B_z = \iint Z\, dxdy,$$

$$Л_x = \iint (yZ - lУ)\, dxdy, \quad Л_y = \iint (lX - xZ)\, dxdy,$$

гдѣ интегралы распространены по всей площади свободнаго основанія призмы. Такъ какъ на этой поверхности $\cos(n, Z) = +1$, то, по формуламъ (244):

$$X = 2g_2 K, \quad У = 2g_1 K, \quad Z = E\varepsilon_3,$$

гдѣ нужно подставить l вмѣсто z.

Возьмемъ равенство (243), помножимъ его на x и возьмемъ интегралъ по контуру; помножимъ его другой разъ на y и также возьмемъ интегралъ по контуру; получимъ:

$$\int g_2 x \cos(н, X)\, dS + \int g_1 x \cos(н, У)\, dS = 0$$

$$\int g_2 y \cos(н, X)\, dS + \int g_1 y \cos(н, У)\, dS = 0.$$

Эти интегралы по формулѣ (216) могутъ быть преобразованы въ интегралы, распространенные по поверхности сѣченія, а потому получимъ слѣдующія равенства:

$$2\iint g_2\, dxdy = -2\iint\left(\frac{\partial g_2}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial y}\right) xdxdy,$$

$$2\iint g_1\, dxdy = -2\iint\left(\frac{\partial g_2}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial y}\right) ydxdy.$$

Такъ какъ изъ равенства (240) слѣдуетъ, что:

$$\frac{\partial g_2}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial y} = -(1+\varkappa)(b + b_1 x + b_2 y),$$

то, на основаніи вышесказаннаго, выраженія для B_x, By получатъ слѣдующій видъ:

$$B_x = 2(1+\varkappa) K (b Sx_c + b_1 \mathfrak{A} + b_2 \mathfrak{F}) = E(b_1 \mathfrak{A}_c + b_2 \mathfrak{F}_c) \,.\,. \mathbf{(256,}\ a\mathbf{)}$$

$$B_y = 2(1+\varkappa) K (b Sy_c + b_1 \mathfrak{F} + b_2 \mathfrak{B}) = E(b_1 \mathfrak{F}_c + b_2 \mathfrak{B}_c), \,. \mathbf{(256,}\ b\mathbf{)}$$

здѣсь:

$$\mathfrak{A} = \iint x^2 dxdy = \mathfrak{A}_c + Sx_c^2,\quad \mathfrak{B} = \iint y^2 dxdy = \mathfrak{B}_c + Sy_c^2$$

$$\mathfrak{F} = \iint xydxdy = \mathfrak{F}_c + Sx_c y_c,$$

т. е. $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ суть моменты инерціи площади основанія $z=0$ вокругъ осей $У$-овъ и X-овъ, а $\mathfrak{F}$ есть произведеніе инерціи этой площади относительно тѣхъ же осей; $\mathfrak{A}_c$, $\mathfrak{B}_c$ и $\mathfrak{F}_c$ суть моменты и произведеніе инерціи относительно параллельныхъ осей, проведенныхъ черезъ центръ тяжести площади.

Далѣе, принявъ во вниманіе соотношеніе (255), найдемъ:

$$B_z = E(a + a_1 x_c + a_2 y_c) S \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \mathbf{(256,}\ c\mathbf{)}$$

Въ выраженіяхъ моментовъ $Л_x$ и $Л_y$ взаимно сократятся на основаніи выраженій (256, a, b) члены, заключающіе l; останется:

$$Л_x = E\,(aSy_c + a_1\,\mathfrak{F} + a_2\mathfrak{B}), \ldots\ldots\ldots\ldots (257, a)$$

$$Л_y = -E\,(aSx_c + a_1\,\mathfrak{A} + a_2\mathfrak{F}) \ldots\ldots\ldots\ldots (257, b)$$

Изъ равенствъ (256, a, b) получимъ слѣдующія выраженія для величинъ коэффиціентовъ b_1 и b_2:

$$b_1 = \frac{\mathfrak{B}_c B_x - \mathfrak{F}_c B_y}{E\,(\mathfrak{A}_c\mathfrak{B}_c - \mathfrak{F}_c^2)},\quad b_2 = \frac{\mathfrak{A}_c B_y - \mathfrak{F}_c B_x}{E\,(\mathfrak{A}_c\mathfrak{B}_c - \mathfrak{F}_c^2)} \ldots\ldots\ldots (258)$$

Изъ равенствъ (257, a, b) можно исключить a при помощи равенства (256, c) и затѣмъ полученныя уравненія рѣшить относительно a_1 и a_2; окажется:

$$a_1 = -\frac{Л_y\mathfrak{B}_c + Л_x\mathfrak{F}_c}{E(\mathfrak{A}_c\mathfrak{B}_c - \mathfrak{F}_c^2)} - \frac{B_z}{E}\left(\frac{\mathfrak{B}_c x_c - \mathfrak{F}_c y_c}{\mathfrak{A}_c\mathfrak{B}_c - \mathfrak{F}_c^2}\right), \ldots\ldots\ldots (259)$$

$$a_2 = \frac{Л_x\mathfrak{A}_c + Л_y\mathfrak{F}_c}{E\,(\mathfrak{A}_c\mathfrak{B}_c - \mathfrak{F}_c^2)} + \frac{B_z}{E}\left(\frac{\mathfrak{F}_c x_c - \mathfrak{A}_c y_c}{\mathfrak{A}_c\mathfrak{B}_c - \mathfrak{F}_c^2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (260)$$

Эти формулы значительно упрощаются въ тѣхъ случаяхъ, когда закрѣпленъ центръ тяжести площади несвободнаго основанія призмы, а площади сѣченій симметричны относительно плоскости YZ, такъ что: $x_c = 0$, $y_c = 0$, $\mathfrak{F}_c = 0$; тогда $b = 0$ и пять постоянныхъ будутъ имѣть слѣдующія величины:

$$b_1 = \frac{B_x}{E\mathfrak{A}_c},\; b_2 = \frac{B_y}{E\mathfrak{B}_c},\; a_1 = -\frac{Л_y}{E\mathfrak{A}_c},\; a_2 = \frac{Л_x}{E\mathfrak{B}_c} \ldots\ldots\ldots (261)$$

$$a = \frac{B_z}{ES} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (261)$$

Прежде чѣмъ опредѣлить постоянную α, слѣдуетъ опредѣлить видъ функціи $F\,(x, y)$. Замѣнимъ ее слѣдующею функціею:

$$F(x,y) = -\beta_1 x - \beta_2 y - \frac{b}{2}(x^2 + y^2) - b_1\,xy^2 - b_2\,x^2y + f\,(x,y); .\,(262)$$

новая функція $f\,(x, y)$ должна будетъ удовлетворять (какъ слѣдуетъ изъ уравненія (240, 3)) уравненію втораго порядка съ частными производными:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (263)$$

на контурѣ — слѣдующему уравненію съ частными производными перваго порядка:

$$\frac{\partial f}{\partial н} = \alpha\,(y\cos(н, X) - x\cos(н, У)) + (1 + \varkappa)\,b\,(x\cos(н, X) + y\cos(н, У)) +$$

$$+ b_1\left[\frac{\varkappa x^2 + (2 - \varkappa)\,y^2}{2}\cos(н, X) + (2 + \varkappa)\,xy\cos(н, У)\right] +$$

$$+ b_2\left[(2 + \varkappa)\,xy\cos(н, X) + \frac{\varkappa y^2 + (2 - \varkappa)\,x^2}{2}\cos(н, У)\right]; \ldots . (264)$$

ъ того, въ силу условій (251), функція f должна удовлетворять слѣдующимъ віямъ:

$$\text{при } x=0,\ y=0:\ f(0,0)=0,\ \frac{\partial f}{\partial x}=\beta_1,\ \frac{\partial f}{\partial y}=\beta_2 \ \ldots\ldots \mathbf{(265)}$$

Можно показать, что для каждой площади существуетъ только одна функція, влетворяющая слѣдующимъ требованіямъ:

чтобы во всѣхъ точкахъ данной площади она и ея производныя были сплошными кціями координатъ и чтобы во всѣхъ точкахъ этой площади она удовлетворяла фференціальному уравненію (263);

чтобы во всѣхъ точкахъ контура данной площади величина $\frac{\partial f}{\partial н}$ была бы данною кціею координатъ точекъ этого контура;

чтобы $f(0,0)$ была равна нулю.

Для того, чтобы доказать это, возьмемъ слѣдующія формулы преобразованія тграловъ:

$$\iint \frac{\partial f_1}{\partial x}\,dxdy=\int f_1 \cos(н, X)\,ds,$$

$$\iint \frac{\partial f_2}{\partial x}\,dxdy=\int f_2 \cos(н, У)\,ds,$$

ѣ f_1 и f_2 суть сплошныя функціи во всѣхъ точкахъ площади) и примѣнимъ ихъ къ кціямъ:

$$f_1=f\frac{\partial f}{\partial x},\quad f_2=f\frac{\partial f}{\partial x},$$

жимъ; получится слѣдующее равенство:

$$\iint\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right)dxdy+\iint f\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)=\int f\frac{\partial f}{\partial н}\,ds \ \ldots\ldots \mathbf{(266)}$$

Если теперь предположимъ, что для данной площади можно найти двѣ различныя кціи f и φ, удовлетворяющія вышесказаннымъ требованіямъ, то разность $(f-\varphi)$ хъ двухъ функцій должна удовлетворять уравненію (263) во всѣхъ точкахъ плоди и уравненію: $\frac{\partial f}{\partial н}-\frac{\partial \varphi}{\partial н}=0$ на контурѣ, а потому, примѣнивъ равенство (266) этой разности, получимъ:

$$\iint\left(\left(\frac{\partial(f-\varphi)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial(f-\varphi)}{\partial y}\right)^2\right)dydy=0.$$

Этотъ интегралъ отъ суммы квадратовъ можетъ быть равенъ нулю только тогда, да во всѣхъ точкахъ площади и на контурѣ:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial \varphi}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial \varphi}{\partial y};$$

Значитъ f и φ могли бы разниться только постоянною величиною, но такъ какъ и та и другая должны быть равны нулю въ началѣ координатъ, то онѣ должны быть тождественны на всей площади.

И такъ для каждой площади можно найти одну только функцію f, удовлетворяющую сказаннымъ требованіямъ.

Такъ какъ $b = -(b_1 x_c + b_2 y_c)$, то можно положить, что

$$f = \alpha\vartheta(x, y) + b_1 \varphi_1(x, y) + b_2 \varphi_2(x, y), \ldots\ldots\ldots\ldots (267)$$

гдѣ δ, φ_1, φ_2 суть три функціи отъ x и y, которыя:

во всѣхъ точкахъ площади сѣченія должны удовлетворять дифференціальному уравненію (263),

на контурѣ производныя отъ нихъ по $н$ должны быть равны слѣдующимъ выраженіямъ:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial н} = y \cos(н, X) - x \cos(н, У) \ldots\ldots\ldots\ldots (268)$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial н} = \left(\frac{\varkappa x^2 + (2-\varkappa) y^2}{2} - (1+\varkappa) x x_c\right) \cos(н, X) +$$
$$+ \left((2+\varkappa) x - (1+\varkappa) x_c\right) y \cos(н, У) \ldots\ldots (269)$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial н} = \left((2+\varkappa) y - (1+\varkappa) y_c\right) x \cos(н, X) +$$
$$+ \left(\frac{\varkappa y^2 + (2-\varkappa) x^2}{2} - (1+\varkappa) y y_c\right) \cos(н, У); \ldots\ldots (270)$$

въ началѣ координатъ, при $x = 0$, $y = 0$, онѣ должны обращаться въ нуль.

Послѣ этого выраженія (252) и (253) получатъ слѣдующій видъ:

$$2g_1 = \alpha \frac{\partial\vartheta}{\partial y} + b_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + b_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + \alpha x - b_1 \left((2+\varkappa) x - (1+\varkappa) x_c\right) y -$$
$$- b_2 \left(\frac{\varkappa y^2 + (2-\varkappa) x^2}{2} - (1+\varkappa) y_c y\right) \ldots\ldots (252)$$

$$2g_2 = \alpha \frac{\partial\vartheta}{\partial x} + b_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + b_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} - \alpha y - b_2 \left((2+\varkappa) y - (1+\varkappa) y_c\right) x -$$
$$- b_1 \left(\frac{\varkappa x^2 + (2-\varkappa) y^2}{2} - (1+\varkappa) x_c x\right) \ldots\ldots (253)$$

Постоянная α опредѣлится по величинѣ момента вокругъ оси Z-овъ внѣшнихъ напряженій, приложенныхъ къ свободному основанію призмы. Этотъ моментъ выразится такъ:

$$Л_z = \iint (xУ - yX)\, dxdy = K \iint 2\,(xg_1 - yg_2)\, dxdy.$$

Подставивъ сюда вмѣсто $2g_1$ и $2g_2$ предыдущія выраженія и принявъ во вниманіе, что

$$\iint \left(x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x}\right) dxdy = \int f_s \left(x \cos(н, У) - y \cos(н, X)\right) ds,$$

ли, на основаніи равенствъ (215) стр. 124:

$$\iint\left(x\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial x}\right)dxdy=-\frac{1}{2}\int f_s\frac{dr^2}{ds}\,ds,$$

получимъ равенство, которое можно будетъ рѣшить относительно α; окажется

$$\alpha\left(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}-\frac{1}{2}\int\delta dr^2\right)=\frac{M_z}{K}+\frac{b_1}{2}\left(\int\varphi_1 dr^2+(\varkappa+4)\,S_{21}+(\varkappa-2)\,S_{03}\right)$$

$$+\frac{b_2}{2}\left(\int\varphi_2 dr^2-(\varkappa+4)\,S_{12}-(\varkappa-2)\,S_{30}\right),\ldots\mathbf{(271)}$$

гдѣ:

$$S_{30}=\iint x^3dxdy,\ S_{21}=\iint x^2ydxdy,$$

$$S_{03}=\iint y^3dxdy,\ S_{12}=\iint xy^2dxdy.$$

Двѣ постоянныя β_1 и β_2 опредѣлятся согласно съ формулами (265) послѣ того, какъ найдены будутъ функціи δ, φ_1 и φ_2 для даннаго сѣченія.

Для того, чтобы дать нѣкоторое понятіе относительно значенія постоянныхъ или коэфиціентовъ a, a_1, a_2, b_1, b_2, β_1 и β_2, остановимся нѣсколько на полученныхъ формулахъ.

Условимся называть *волокнами* призмы тѣ линіи, которыя въ предварительномъ состояніи были параллельны оси Z-овъ; подъ *осевымъ волокномъ* будемъ подразумѣвать то, которое совпадало съ осью Z-овъ и одинъ конецъ котораго закрѣпленъ въ основаніи $z=0$; *центральнымъ волокномъ* будемъ называть то, которое проходитъ черезъ центры тяжести сѣченій; если x_c и y_c равны нулю, то центральное волокно есть вмѣстѣ съ тѣмъ и осевое.

Коэфиціенты сдвиговъ $2g_1$ и $2g_2$ суть вмѣстѣ съ тѣмъ и косинусы угловъ, составляемыхъ направленіями искривленныхъ волоконъ съ тѣми линіями площадей сѣченій, которыя были параллельны осямъ Y-овъ и X-овъ. Такъ какъ $2g_1$ и $2g_2$ независятъ отъ z, то отсюда слѣдуетъ, что *каждое искривленное волокно наклонено одинаково ко всѣмъ искривленнымъ сѣченіямъ въ тѣхъ точкахъ, въ которыхъ оно ихъ пересѣкаетъ.*

При $x=0$ и $y=0$ коэфиціенты $2g_1$ и $2g_2$ обращаются въ β_2 и β_1 (см. (252) и (253) стр. 145), слѣдовательно β_2 и β_1 суть косинусы угловъ, составляемыхъ искривленнымъ осевымъ волокномъ съ тѣми направленіями въ каждомъ сѣченіи, которыя были предварительно параллельны осямъ Y-овъ и X-овъ.

Уравненія искривленнаго осеваго волокна получатся по исключеніи z изъ равенствъ:

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{x}=\beta_1 z-\frac{a_1}{2}z^2-\frac{b_1}{6}z^3,\ \mathrm{y}=\beta_2 z-\frac{a_2}{2}z^2-\frac{b_2}{6}z^3,\\ \mathrm{z}=z\,(1+a)-(b_1x_c+b_2y_c)\,\frac{z^2}{2},\end{array}\right\}\ldots\ldots\mathbf{(272)}$$

которыя получатся изъ выраженій: $\mathrm{x}=u$, $\mathrm{y}=v$, $\mathrm{z}=w$, если въ u, v, w, выражаемыхъ формулами (248—250), сдѣлаемъ $x=0$, $y=0$.

Изъ этихъ равенствъ видно, что если осевое волокно есть вмѣстѣ съ тѣмъ и центральное волокно, то оно имѣетъ видъ кривой 3-го порядка, если же b_1 и b_2 равны нулю, то осевое волокно есть кривая втораго порядка.

Подставивъ въ формулахъ (248—250) x_c и y_c вмѣсто x и y и присоединивъ полученныя выраженія для u, v, w къ x_c, y_c и z, получимъ выраженія координатъ точекъ центральнаго волокна въ деформированномъ состояніи; принявъ во вниманіе равенство (255) и (256, c) получимъ слѣдующія уравненія этого волокна:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{x}&=\mathrm{x}_c+B_1 z-a_1\frac{z^2}{2}-b_1\frac{z^3}{6}\\ \mathrm{y}&=\mathrm{y}_c+B_2 z-a_2\frac{z^2}{2}-b_2\frac{z^3}{6}\\ \mathrm{z}&=F(x_c,y_c)+z(1+a'); \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\quad (273)$$

здѣсь, для краткости, нѣкоторыя суммы обозначены однимъ знакомъ, а именно:

$$\mathrm{x}_c=x_c-\frac{B_z}{SE}\varkappa x_c+a_1(x_c^2+y_c^2)\frac{\varkappa}{2},\quad B_1=\beta_1-\alpha y_c+b_1(x_c^2+y_c^2)\frac{\varkappa}{2},$$

$$\mathrm{y}_c=y_c-\frac{B_z}{SE}\varkappa y_c+a_2(x_c^2+y_c^2)\frac{\varkappa}{2},\quad B_2=\beta_2+\alpha x_c+b_2(x_c^2+y_c^2)\frac{\varkappa}{2},$$

кромѣ того, отношеніе $(B_z:SE)$ означено черезъ a'.

Изъ этихъ уравненій видно, что a' представляетъ удлинненіе единицы центральнаго волокна по оси Z-овъ; если начало центральнаго волокна закрѣплено, такъ что x_c и y_c равны нулю, то a' равно a; во всякомъ случаѣ $a'l$ представляетъ удлинненіе всего центральнаго волокна по оси Z-овъ.

Если провести черезъ центръ тяжести основанія $z=0$ касательную къ искривленному центральному волокну, то координаты x и y точекъ этой прямой выразятся суммами $\mathrm{x}_c+B_1 z$ и y_c+Bz. Возьмемъ на этой прямой такую точку, для которой $z=l$. Разность между координатами по осямъ X и $У$ свободнаго конца центральнаго волокна и координатами упомянутой сейчасъ точки, т. е. величины:

$$-a_1\frac{l^2}{2}-b_1\frac{l^3}{6};\ -a_2\frac{l^2}{2}-b_2\frac{l^3}{6},$$

называются стрѣлками изгиба центральнаго волокна по осямъ X-овъ и $У$-овъ.

Изъ четырехъ коэфиціентовъ a_1, a_2, b_1, b_2, опредѣляющихъ величины стрѣлокъ изгиба, два послѣдніе, какъ видно изъ формулъ (258) стр. 148, зависятъ отъ величинъ проэкцій B_x, B_y главнаго вектора напряженій, приложенныхъ къ свободному основанію, и равны нулю, когда эти проэкціи равны нулю; тогда центральное волокно есть кривая втораго порядка.

Два другіе коэфиціента a_1 и a_2, какъ видно изъ формулъ (259) и (260) зависятъ отъ моментовъ $Л_x$ и $Л_y$, и кромѣ того зависятъ еще отъ a' или отъ B_z, если центръ тяжести несвободнаго основанія не закрѣпленъ.

Коэфиціентъ α есть коэфиціентъ крученія; онъ, какъ видно изъ формулы (271), зависитъ не только отъ $Л_z$, но и еще отъ b_1 и b_2, такъ что закручиваніе можетъ происходить и при $Л_z$ равномъ нулю подъ вліяніемъ изгибающихъ силъ, если только основанія призмъ не симметричны относительно плоскостей ZX и ZY.

Обратимся теперь къ разысканію нѣкоторыхъ контуровъ, для которыхъ видъ всѣхъ трехъ функцій ϑ, φ_1, φ_2 можетъ быть опредѣленъ.

Прежде всего замѣтимъ, что функція $\vartheta\,(x, y)$ должна удовлетворять такимъ же самымъ требованіямъ, какимъ должна была удовлетворять функція w въ задачѣ о кручении призмъ. Пусть $\Phi\,(x + yi)$ есть какая либо функція отъ комплексной перемѣнной, $\psi\,(x, y)$ дѣйствительная, а $\vartheta\,(x, y)$ мнимая часть этой функціи. Уравненіе (268), которому должна удовлетворять функція ϑ на контурѣ, можетъ быть представлено подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\frac{d\psi}{ds} + \frac{1}{2}\frac{dr^2}{ds} = 0;$$

слѣдовательно, на площади, ограниченной контуромъ выражаемымъ уравненіемъ: $2\psi + r^2 = C$, функціею ϑ можетъ служить мнимая часть той функціи, дѣйствительная часть которой есть ψ.

Сумма:

$$A_1 r\cos\theta + A_2 r^2\cos 2\theta + A_3 r^3\cos 3\theta + A_4 r^4\cos 4\theta + \ldots$$

$$+ B_1 r\sin\theta + B_2 r^2\sin 2\theta + B_3 r^3\sin 3\theta + B_4 r^4\sin 4\theta + \ldots$$

можетъ быть мнимою частью функціи отъ комплексной перемѣнной и можетъ служить функціею ϑ для нѣкотораго контура; видъ этого контура мы всегда въ состояніи опредѣлить.

Будемъ теперь искать видъ тѣхъ контуровъ, для которыхъ φ_1 и φ_2 выражаются тоже суммами подобнаго же вида.

Чтобы функція $\varphi_1\,(x, y)$ выражалась суммою членовъ приведеннаго выше вида, необходимо, чтобы эта сумма удовлетворяла уравненію (269) на контурѣ, такъ какъ она уже завѣдомо удовлетворяетъ уравненію (263) во всѣхъ точкахъ плоскости.

Мы будемъ предполагать, что x_c и y_c равны нулю.

Коэфиціенты A и B мы подчинимъ тому условію, чтобы выраженіе:

$$\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} - \frac{\varkappa x^2 + (2-\varkappa)\,y^2}{2}\right)\frac{dy}{ds} + \left((2+\varkappa)\,xy - \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)\frac{dx}{ds},$$

по умноженіи на надлежащій интегрирующій множитель V, приводилось бы къ виду:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{dx}{ds},$$

гдѣ ψ есть какая либо функція отъ x и y.

Не трудно убѣдиться въ томъ, что безъ интегрирующаго множителя здѣсь обойтись нельзя.

Посмотримъ, не можетъ ли быть интегрирующій множитель функціею одного только y.

Интегрирующій множитель двучленнаго дифференціальнаго выраженія $Xdx + Ydy$, незаключающій x, долженъ удовлетворять дифференціальному уравненію:

$$V\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) = X\frac{\partial V}{\partial y}.$$

Въ настоящемъ случаѣ это послѣднее будетъ:

$$\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2} - 2\,(1+\varkappa)\,x\right)V = \left((2+\varkappa)\,xy - \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)\frac{\partial V}{\partial y},$$

но, такъ какъ φ_1 удовлетворяетъ дифференціальному уравненію (263), а V есть функція только отъ y, то отсюда слѣдуетъ, что выраженіе

$$\frac{1}{x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} - (2+\varkappa)\,y$$

должно быть функціею только отъ y, а слѣдовательно и дѣленная на x частная производная отъ φ_1 по y не должна заключать x. Для этого должны быть равны нулю слѣдующіе изъ коэфиціентовъ вышеприведенной суммы:

$$A_2,\ A_4,\ A_5,\ A_6, \ldots B_1,\ B_3,\ B_4,\ B_5,\ B_6 \ldots$$

Поэтому φ_1 можетъ имѣть такой видъ:

$$\varphi_1 = A_1x + 2B_2\,xy + A_3\,(x^3 - 3xy^2).$$

Дифференціальное уравненіе, которому долженъ удовлетворять множитель V, будетъ такое:

$$\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1+\varkappa}{B_2 - \left(3A_3 + \frac{2+\varkappa}{2}\right)y};$$

интегрируя его найдемъ, что интегрирующій множитель долженъ быть слѣдующій:

$$V = \left(B_2 + \frac{1+\varkappa}{n}y\right)^n,\quad n = -\frac{1+\varkappa}{3A_3 + \frac{2+\varkappa}{2}}.$$

Выразимъ A_3 въ n и $\varkappa$ и вмѣсто y введемъ перемѣнную η:

$$\eta = B_2 + \frac{1+\varkappa}{n}y,\quad 3A_3 = -\frac{2+\varkappa}{2} - \frac{1+\varkappa}{n},$$

тогда дифференціальное уравненіе, умноженное на V, получитъ слѣдующій видъ:

$$\left(C - \frac{2\varkappa n^2B_2}{(1+\varkappa)^2}\eta + \frac{\varkappa n + (1+\varkappa)}{(1+\varkappa)^2}n\eta^2\right)\frac{n}{1+\varkappa}\eta^n d\eta = d\,(x^2\eta^{n+1}),$$

...е:

$$C = A_1 + \frac{\varkappa n - (1 + \varkappa)}{(1 + \varkappa)^2} n B_2^2.$$

По интегрированіи и по раздѣленіи на η въ степени $(n + 1)$, получимъ, означ...въ новую постоянную произвольную черезъ D:

$$\frac{Cn}{(1+\varkappa)(n+1)} - \frac{2\varkappa n^3 B_2}{(1+\varkappa)^3 (n+2)} \eta + \frac{(\varkappa n + (1+\varkappa))\, n^2}{(1+\varkappa)^3 (n+3)} \eta^2 - x^2 = \frac{D}{\eta^{n+1}} \ldots (274)$$

Мы предположили, что центръ тяжести площадей, окаймленныхъ разсматривае...ъ контуромъ, находится въ началѣ координатъ. Такъ какъ уравненія полученныхъ ...туровъ заключаютъ только x^2 и болѣе никакихъ другихъ степеней этой перемѣн..., то очевидно, что контуры симметричны относительно оси Y-овъ и что стало быть ... $= 0$. Можно было бы разсмотрѣть, при какихъ условіяхъ y_c будетъ также равно ...лю; но мы ограничимся только тѣми изъ полученныхъ нами контуровъ, которые ...ютъ очевидную симметрію также и относительно оси X-овъ. Это тѣ кривыя, кото... получатся при B_2 равномъ нулю и при такихъ значеніяхъ $(n + 1)$, которыя даютъ ...кнутый контуръ, составленный либо изъ одной непрерывной кривой, какъ эллипсъ, ...о изъ частей различныхъ кривыхъ, соотвѣтствующихъ одному и тому же $(n + 1)$.

При B_2 равномъ нулю уравненіе (274) получаетъ слѣдующій видъ:

$$\frac{A_1 n}{(1+n)(1+\varkappa)} + \left(1 + \frac{\varkappa n}{1+\varkappa}\right) \frac{y^2}{n+3} - x^2 = \frac{D_1}{y^{n+1}} \ldots \ldots \ldots (274)$$

...ункція φ_1 слѣдующій видъ:

$$\varphi_1(x, y) = A_1 x + \left(\frac{2+\varkappa}{2} + \frac{1+\varkappa}{n}\right)\left(xy^2 - \frac{x^3}{3}\right) \ldots \ldots \ldots (275)$$

1. Прежде всего остановимся на тѣхъ случаяхъ, когда $D_1 = 0$ и когда уравне... (274) выражаетъ эллипсъ: $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$. Для этого надо, чтобы были:

$$\frac{A_1 n}{(1+n)(1+\varkappa)} = a^2, \quad \frac{A_1 n (n+3)}{(n+1)(\varkappa n + (1+\varkappa))} = -b^2$$

...тсюда слѣдуетъ, что n и A_1 должны имѣть слѣдующія величины:

$$n = -(1+\varkappa) \frac{b^2 + 3a^2}{b^2\varkappa + a^2(1+\varkappa)}, \quad A_1 = a^2 \frac{b^2 + 2(1+\varkappa)a^2}{b^2 + 3a^2}$$

... (x, y) выражается такъ:

$$= \frac{1}{b^2+3a^2}\Big((b^2 + 2(1+\varkappa)a^2)\, a^2 x + ((2-\varkappa)b^2 + (4+\varkappa)a^2) \frac{3xy^2 - x^3}{6}\Big) \ldots (276)$$

Замѣнивъ здѣсь x, y, a и b черезъ y, x, b и a, получимъ выраженіе функціи φ_2 ...) для того же самаго эллипса, какъ видно изъ сравненія между собою выраженій ...) и (270) стр. 150; такъ получимъ:

$$= \frac{1}{a^2+3b^2}\Big((a^2 + 2(1+\varkappa)b^2)\, b^2 y + ((2-\varkappa)a^2 + (4+\varkappa)b^2) \frac{3yx^2 - y^3}{6}\Big) \ldots (277)$$

Кромѣ того намъ уже извѣстно, что для того же эллипса функція $\mathfrak{I}(x, y)$ должна имѣть слѣдующій видъ:

$$\mathfrak{I} = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} xy \ldots\ldots\ldots\ldots (278)$$

Теперь, зная эти три функціи для эллипса, *можемъ вполнѣ рѣшить задачу о деформаціи эллиптическаго цилиндра:* $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ *при слѣдующихъ обстоятельствахъ:*

Закрѣплены: центръ основанія $z = 0$, *элементъ линіи, совпадающей съ осью* X*-овъ, и элементъ площадки, совпадающей съ плоскостью* XY (оба эти элемента должны заключать въ себѣ центръ основанія, т. е. начало координатъ); *боковая поверхность цилиндра неподвержена внѣшнимъ напряженіямъ, внѣшнія напряженія приложены только къ незакрѣпленнымъ частямъ основанія* $z = 0$ *и къ основанію* $z = l$ *и притомъ такимъ образомъ, что проэкціи на оси координатъ главнаго вектора и главнаго момента (вокругъ начала координатъ) внѣшнихъ напряженій, приложенныхъ къ основанію* $z=l$, *имѣютъ заданныя величины* B_x, B_y, B_z, $Л_x$, $Л_y$, $Л_z$.

Имѣя выраженія (276—278) получимъ коэфиціенты β_1 и β_2:

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = b_1 \frac{b^2 + 2(1+\varkappa)a^2}{b^2 + 3a^2} a^2 \\ \beta_2 &= \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = b_2 \frac{a^2 + 2(1+\varkappa)b^2}{a^2 + 3b^2} b^2 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (279)$$

Затѣмъ мы найдемъ для одного изъ интеграловъ, входящихъ въ равенство (271), слѣдующее выраженіе:

$$\frac{1}{2}\int \mathfrak{I} dr^2 = \int \mathfrak{I}\,(y\cos(н, X) - x\cos(н, У))\,ds = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}(\mathfrak{B}_c - \mathfrak{A}_c),$$

другіе два интеграла окажутся выраженными въ S_{30}, S_{21}, S_{12}, S_{03}, а эти интегралы для площади, симметричной относительно обѣихъ осей, равны нулю.

Поэтому α выразится такъ (см. 271):

$$\alpha = \frac{Л_z}{K} \frac{a^2 + b^2}{\pi a^3 b^3}, \ldots\ldots\ldots\ldots (219)$$

т. е. такъ же, какъ и въ случаѣ простаго закручиванія этого цилиндра.

Остальные пять коэфиціентовъ: a_1, a_2, b_1, b_2 и наконецъ коэфиціентъ a, который, для отличія отъ большой полуоси эллипса, означимъ черезъ a_3, выразятся по формуламъ (261):

$$b_1 = \frac{4B_x}{E\pi a^3 b}, \; b_2 = \frac{4B_y}{E\pi a b^3}, \; a_1 = -\frac{4Л_y}{E\pi a^3 b}, \; a_2 = \frac{4Л_x}{E\pi a b^3}, \; a_3 = \frac{B_z}{E\pi a b}.$$

Разсмотримъ деформацію этого цилиндра въ томъ случаѣ, когда напряженія, приложенныя къ свободному его основанію направлены параллельно оси $У$-овъ и распре-

дѣлены симметрично относительно плоскости YZ, такъ что B_x, $Л_y$, B_z и $Л_z$ равны нулю, а $Л_x = -lB_y$, такъ какъ у всѣхъ напряженій одно и то же плечо: l.

Въ такомъ случаѣ b_1, a_1, a_3, β_1 и α равны нулю, а функція $F(x, y)$ имѣетъ слѣдующій видъ:

$$F(x,y) = -\frac{b_2}{2(a^2+3b^2)}\left[(\varkappa a^2+(2-\varkappa)b^2)\,x^2y+((2-\varkappa)\,a^2+(4+\varkappa)\,b^2)\frac{y^3}{3}\right]. \quad (280)$$

и перемѣщенія точекъ выражаются такъ:

$$\left.\begin{aligned} u &= \varkappa b_2\,(l-z)\,xy,\quad w = b_2\left(\frac{z}{2}-l\right)zy + F(x,y) \\ v &= \varkappa b_2\,(l-z)\frac{y^2-x^2}{2}+\beta_2\,z+b_2\left(l-\frac{z}{3}\right)\frac{z^2}{2} \end{aligned}\right\};\ldots\ldots.(H)$$

отсюда, координаты точекъ въ деформированномъ состояніи выразятся слѣдующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{x} &= x\,(1+b_2\varkappa\,(l-z)\,y), \\ \mathrm{y} &= y+b_2\varkappa\,(l-z)\frac{y^2-x^2}{2}+\beta_2\,z+b_2\left(l-\frac{z}{3}\right)\frac{z^2}{2}, \\ \mathrm{z} &= z+\left(b_2\left(\frac{z}{2}-l\right)z+\frac{F(x,y)}{y}\right)y. \end{aligned}\right\}\ldots\ldots(281)$$

Положивъ въ этихъ формулахъ $y = 0$, найдемъ: $\mathrm{x} = x$, $\mathrm{z} = z$; это значитъ, что всѣ волокна, бывшія сначала въ плоскости YZ, остались въ своихъ вертикальныхъ плоскостяхъ и не получили удлинненія по оси Z-овъ, онѣ перемѣстились только по оси $У$-овъ и получили видъ кривыхъ, выражаемыхъ уравненіями:

$$\mathrm{y} = b_2\left(\varkappa\,(\mathrm{z}-l)\frac{\mathrm{x}^2}{2}+\frac{\beta_2}{b_2}\mathrm{z}+\left(l-\frac{\mathrm{z}}{3}\right)\frac{\mathrm{z}^2}{2}\right),\ldots\ldots\ldots.(282)$$

если разсматривать x какъ постоянныя; если же разсматривать x какъ перемѣнное, то это равенство есть уравненіе той поверхности, въ которую обращается сѣченіе цилиндра плоскостью $XУ$ при деформаціи его; линія пересѣченія этой поверхности всякою плоскостью, перпендикулярною къ оси Z-овъ, есть обыкновенная парабола, ось которой направлена по отрицательной оси $У$-овъ, вершина которой находится въ точкѣ пересѣченія этой плоскости центральнымъ волокномъ, а полупараметръ равенъ единицѣ, дѣленной на $b_2\varkappa\,(l-\mathrm{z})$. Эти параболы представляютъ деформированное состояніе большихъ осей площадей поперечныхъ сѣченій призмы; полупараметръ параболы закрѣпленнаго основанія наименьшій, между тѣмъ какъ большая полуось свободнаго основанія остается прямолинейною.

При $\mathrm{x} = 0$ равенство (282) обращается въ уравненіе центральнаго волокна; это — парабола третьяго порядка:

$$\mathrm{y} = b_2\left(\frac{a^2+2\,(1+\varkappa)\,b^2}{a^2+3b^2}\,b^2\mathrm{z}+\left(l-\frac{\mathrm{z}}{3}\right)\frac{\mathrm{z}^2}{2}\right)\ldots\ldots\ldots.(283)$$

Въ началѣ координатъ касательная къ ней составляетъ съ осью Z-овъ уголъ, тангенсъ котораго равенъ β_2. Если считать разстояніе η точекъ этой кривой параллельно оси Y-овъ отъ этой касательной, то разстояніе свободнаго конца центральнаго волокна окажется равнымъ:

$$k = b_2 \frac{l^3}{3}$$

независимо отъ размѣровъ эллипса, при той же величинѣ b_2. Уголъ, составляемый съ осью Z-овъ касательными, проведенными въ разныхъ точкахъ волокна, непрерывно возрастаетъ отъ начала координатъ и до конца его, какъ видно изъ выраженія:

$$\frac{dy}{dz} = \beta_2 + \left(l - \frac{z}{2}\right) z b_2.$$

Радіусъ кривизны волокна имѣетъ безконечно-большую величину на свободномъ концѣ его.

Положивъ въ уравненіяхъ (281) z постояннымъ (положимъ $z = c$), будемъ имѣть выраженія координатъ точекъ призмы, находившихся сначала на одномъ и томъ же поперечномъ сѣченіи цилиндра; исключивъ x и y изъ этихъ выраженій, получимъ уравненіе поверхности, образуемой искривленнымъ сѣченіемъ; поверхность эта третьяго порядка.

Перенесемъ начало координатъ на время въ точку пересѣченія разсматриваемой поверхности съ центральнымъ волокномъ ($x = 0$, $y = 0$, $z = c$); означивъ новые координаты через η и ζ, получимъ слѣдующія выраженія:

$$\mathrm{x} = x\,(1 + b_2\,\varkappa(l - c)\,y),\quad \eta = y + b_2\,\varkappa(l - c)\,\frac{y^2 - x^2}{2},$$

$$\zeta = b_2\left(\frac{c}{2} - l\right) c\,y + F\,(xy).$$

Возьмемъ за новую ось Z-овъ касательную къ центральному волокну въ новомъ началѣ координатъ и за новую ось Y-овъ нормаль къ этому волокну въ той же точкѣ, направленную къ центру кривизны. Новая ось Z-овъ будетъ составлять съ прежнею уголъ φ, синусъ и косинусъ котораго выразятся, пренебрегая квадратами и высшими степенями b_2, такъ:

$$\cos\varphi = 1,\quad \sin\varphi = \beta_2 - \left(\frac{c}{2} - l\right) c b_2.$$

Означивъ новыя координаты поверхности черезъ $\mathfrak{y}$ и $\mathfrak{z}$, найдемъ, что онѣ выразятся, пренебрегая вторыми и высшими степенями b_2, такими формулами:

$$\mathfrak{y} = \eta\cos\varphi - \zeta\sin\varphi = y + b_2\,\varkappa(l - c)\,\frac{y^2 - x^2}{2}, \quad \text{(284, } b\text{)}$$

$$\mathfrak{z} = \zeta\cos\varphi + \eta\sin\varphi = \beta_2\,y + F\,(x, y): \quad \text{(284, } c\text{)}$$

къ этимъ двумъ формуламъ должно присоединить еще выраженіе для x; назовемъ эту координату черезъ $\mathfrak{x}$.

$$\mathfrak{x} = \mathrm{x} = x\,(1 + b_2\,\varkappa(l - c)\,y) \quad \text{(284, } a\text{)}$$

По исключеніи x и y изъ этихъ трехъ выраженій и пренебрегая вторыми степенями b_2, получимъ слѣдующее уравненіе поверхности искривленнаго сѣченія въ новыхъ координатахъ: $\mathfrak{z} = \beta_2 \mathfrak{y} + F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$, то есть:

$$(\varkappa a^2 + (2 - \varkappa) b^2)\, \mathfrak{x}^2 + ((2 - \varkappa) a^2 + (4 + \varkappa) b^2) \frac{\mathfrak{y}^2}{3} =$$

$$= 2\, (a^2 + 2\,(1 + \varkappa) b^2)\, b^2 - \frac{2\,(a^2 + 3b^2)}{b_2} \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{y}} \ldots\ldots (285)$$

Такое уравненіе поверхности искривленнаго сѣченія получили мы, пренебрегая вторыми и высшими степенями b_2; это уравненіе не заключаетъ c, поэтому можемъ сказать слѣдующее:

Если стрѣлка k изгиба призмы настолько мала, что представляется возможнымъ пренебречь вторыми и высшими степенями величины:

$$\frac{3k}{l^3} = b_2,$$

то, пренебрегая такими степенями этой величины, можемъ считать, что всѣ сѣченія призмы имѣютъ одинъ и тотъ же видъ при деформированномъ состояніи.

Видъ поверхности (285) такой, что если пересѣчемъ ее плоскостью $\mathfrak{z} = 0$, то получимъ въ пересѣченіи: прямую $\mathfrak{y} = 0$ и эллипсъ, полуось котораго, расположенная по новой оси Y-овъ, болѣе b.

Плоскость, проведенная черезъ новую ось X-овъ подъ угломъ къ новой оси Y-овъ не бо́льшимъ $\operatorname{arctg} \beta_2$, пересѣчетъ эту поверхность третьяго порядка по нѣкоторому эллипсу, подобному тому, который образуется пересѣченіемъ поверхности плоскостью $\mathfrak{z} = 0$; при углѣ наклоненія, равномъ $\operatorname{arctg} \beta_2$, эллипсъ обращается въ точку $\mathfrak{x} = 0$, $\mathfrak{y} = 0$, $\mathfrak{z} = 0$. Съ другой стороны, если провести какую либо плоскость, пересѣкающую плоскость YZ во второмъ и четвертомъ квадрантахъ, то получимъ опять эллипсы, подобные вышесказаннымъ.

Слѣдовательно, *всѣ тѣ плоскости, проведенныя черезъ новую ось X-овъ, которыя пересѣкаютъ поверхность (285), пересѣкаютъ ее по подобнымъ между собою эллипсамъ; плоскость, касательная къ поверхности въ началѣ координатъ, имѣетъ нормалью прямую, составляющую уголъ* $\operatorname{arctg} \beta_2$ *съ новою положительною осью Z-овъ и уголъ* $\operatorname{arccotg} \beta_2$ *съ отрицательною новою осью Y-овъ.*

Топографическія кривыя линіи, образуемыя пересѣченіями поверхности (285) плоскостями, перпендикулярными къ новой оси Z-овъ, выражаются уравненіями, которыя получимъ изъ (285), сдѣлавъ въ немъ $\mathfrak{z}$ равнымъ $\pm n$; изъ этихъ уравненій: $\pm n = \beta_2 \mathfrak{y} + F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ видно, что топографическія кривыя симметричны относительно плоскости YZ и что топографическая линія, соотвѣтствующая какому либо положительному $(+n)$, находится вся на сторонѣ положительныхъ Y-овъ, а топографическая линія, соотвѣтствующая такому же отрицательному n, находится вся на сторонѣ отрицательныхъ Y-овъ и притомъ расположена симметрично съ первою относительно плоскости XZ.

Для круговаго цилиндра, когда $a = b = R$, уравненіе (285) получаетъ слѣдующій видъ:

$$\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 = (3 + 2\varkappa) R^2 - \frac{4R^2}{b_2} \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{y}}, \ldots\ldots\ldots\ldots (286)$$

причемъ β_2 равно $(3 + 2\varkappa)\, b_2 R^2$ дѣленному на 4. Здѣсь всѣ сѣченія поверхности плоскостями, проведенными черезъ новую ось X-овъ, суть круги, причемъ въ числѣ этихъ сѣченій оказывается и периметръ самаго поперечнаго сѣченія призмы, т. е. кругъ радіуса R; онъ заключается въ плоскости, нормаль къ которой составляетъ съ осью Z-овъ уголъ, имѣющій тангенсомъ половину $(1 + \varkappa)\, b_2$; кругъ, образуемый пересѣченіемъ поверхности плоскостью XY, имѣетъ радіусъ равный $R\sqrt{3 + 2\varkappa}$.

Уравненія топографическихъ линій въ этомъ случаѣ можно представить такъ:

$$\left(\frac{r}{R}\right)^3 - (3 + 2\varkappa)\frac{r}{R} \pm \frac{4n}{b_2 R \cos\theta} = 0,$$

гдѣ θ есть уголъ, составляемый направленіемъ радіуса вектора кривой съ положительною осью $У$-овъ.

Рѣшая это уравненіе третьей степени относительно r, находимъ для каждаго n, не бо́льшаго нѣкотораго предѣла, три дѣйствительныя значенія r:

$$\frac{r_1}{R} = 2\sqrt{\frac{3 + 2\varkappa}{3}}\cos\omega,\ \frac{r_2}{R} = 2\sqrt{\frac{3 + 2\varkappa}{3}}\cos\left(\omega + \frac{2\pi}{3}\right),\ \frac{r_3}{R} = 2\sqrt{\frac{3 + 2\varkappa}{3}}\cos\left(\omega + \frac{4\pi}{3}\right),$$

гдѣ:

$$\cos 3\omega = \mp \frac{2n}{b_2 R \cos\theta}\left(\frac{3}{3 + 2\varkappa}\right)^{\frac{3}{2}}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (287)$$

при всякомъ такомъ θ, косинусъ котораго дѣлаетъ вторую часть выраженія (287) меньшею единицы.

Предѣльная величина для n — слѣдующая:

$$n = \frac{b_2 R}{2}\left(\frac{3 + 2\varkappa}{3}\right)^{\frac{3}{2}},$$

топографическія кривыя, соотвѣтствующія этимъ величинамъ n, обращаются въ точки, находящіяся на оси $У$-овъ.

На чертежѣ 34-мъ изображены топографическія линіи поверхности (286) не только внутри круга радіуса R, но и внѣ его, тамъ изображенъ и кругъ радіуса $R\sqrt{3 + 2\varkappa}$, служащій вмѣстѣ съ осью X-овъ, топографическою линіею $n = 0$ поверхности. На этомъ чертежѣ проведена еще линія черезъ центръ круга, представляющая кривую пересѣченія искривленнаго сѣченія новою плоскостью YZ.

2. Надъ всѣми прочими замкнутыми контурами, которые выражаются уравненіями вида (274), мы столь подробно останавливаться не будемъ. Замѣтимъ только, что для нихъ приходится ограничиваться только рѣшеніемъ вопроса объ изгибѣ призмы напряженіями, параллельными оси $У$-овъ и симметрично распредѣленными по обѣ стороны плоскости YZ; для всѣхъ этихъ замкнутыхъ симметричныхъ контуровъ перемѣщенія точекъ призмы выражаются формулами (H); выраженія координатъ x, y, z при изгибѣ призмы формулами (281), уравненіе центральнаго волокна — формулою (283), уравненіе поверхности, образуемой волокнами неполучившими удлинненія — формулою (282), уравненіе поверхности сѣченій, пренебрегая квадратами и высшими степенями b_2, будетъ выражаться уравненіемъ $\mathfrak{z} = \beta_2\, \mathfrak{y} + F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$. Разница будетъ въ коэфиціентахъ функціи F и въ величинахъ β_2 и $\mathfrak{A}_c$, $\mathfrak{B}_c$.

Для всѣхъ этихъ случаевъ:

$$f = b_2\varphi_2,\ \ \varphi_2 = A_1 y + C\left(yx^2 - \frac{y^3}{3}\right),\ \ \beta_2 = A_1 b_2$$

$$F(x, y) = b_2 y\left((C-1)\,x^2 - \frac{C}{3}y^2\right),$$

гдѣ

$$C = \frac{2+\varkappa}{2} + \frac{1+\varkappa}{n}$$

есть коэфиціентъ, величина котораго зависитъ отъ $\varkappa$, т. е., отъ природы вещества призмы, и отъ n. Можно подыскать, конечно, такіе замкнутые контуры, для которыхъ, напримѣръ, $C = 1$, тогда топографическія линіи для этихъ контуровъ будутъ выражаться слѣдующими уравненіями:

$$\pm n = A_1 b_2 y - b_2 \frac{y^3}{3},$$

т. е. это будутъ прямыя, параллельныя оси X-овъ. Для этого необходимо, чтобы $(1+n)$ было равно $-\left(\frac{2}{\varkappa}+1\right)$; т. е. было бы дробнымъ; въ такихъ случаяхъ можетъ получиться замкнутый контуръ, составленный изъ кривой:

$$\frac{A_1 n}{(1+n)(1+\varkappa)} - \frac{y^2}{n+3} - x^2 = D_1 y^{-(n+1)}$$

на той части плоскости XY, которая соотвѣтствуетъ положительнымъ y, и изъ кривой:

$$\frac{A_1 n}{(1+n)(1+\varkappa)} - \frac{y^2}{n+3} - x^2 = -D_1 y^{-(n+1)}$$

на сторонѣ отрицательныхъ y. Относительно всѣхъ подобныхъ обстоятельствъ и вида могущихъ здѣсь представиться контуровъ мы рекомендуемъ обратиться къ статьѣ С. Венана*), въ которой, впрочемъ $\varkappa$ полагается равнымъ 0,25.

3. Изгибъ призмы, основанія которой имѣютъ какой угодно симметричный относительно плоскостей YZ и ZX видъ, можетъ быть опредѣленъ весьма просто въ тѣхъ случаяхъ, когда напряженія, приложенныя къ основаніямъ ея, таковы, что главный векторъ B равенъ нулю (и конечно также и проэкціи его B_x, B_y, B_z на оси координатъ), а изъ моментовъ же напряженій, приложенныхъ къ свободному основанію, равенъ нулю L_z. Въ такихъ случаяхъ нѣтъ надобности опредѣлять вида функцій ϑ, φ_1 и φ_2, потому что коэфиціенты α, b_1 и b_2 равны нулю, коэфиціенты β_1 и β_2 тоже равны нулю, а остаются только a_1 и a_2, выражающіеся по формуламъ (261) стр. 148 въ величинахъ двухъ остальныхъ, неравныхъ нулю, моментовъ.

---

*) de Saint-Venant. Mémoire sur la flexion des prismes, sur les glissements transversaux et longitudinaux qui l'accompagnent lorsqu'elle ne s'opère pas uniformément ou en arc de cercle, et sur la forme courbe affectée alors par leurs sections transversales primitivement planes. Journal de mathématiques p. Liouville, 2-me Série, T. I, 1856.

Возьмемъ тотъ случай, когда неравенъ нулю только моментъ вокругъ оси X-овъ. Тогда $a_1 = 0$ и $a_2 E\mathfrak{B}_c = Л_x$; перемѣщенія точекъ призмы выразятся формулами:

$$u = -\varkappa a_2 xy,\ v = -a_2 \frac{z^2}{2} - \varkappa a_2 \frac{y^2 - x^2}{2},\ w = a_2 yz,$$

а координаты x, y, z — формулами:

$$\mathrm{x} = x(1 - \varkappa a_2 y),\ \mathrm{y} = y - \frac{a_2}{2}((y^2 - x^2)\varkappa + z^2),\ \mathrm{z} = z(1 + a_2 y) \ldots \mathbf{(288)}$$

При постоянныхъ x и y, эти равенства выражаютъ форму искривленнаго волокна; каждое волокно будетъ заключаться въ вертикальной плоскости, но, вообще говоря не въ той, въ которой оно было въ предварительномъ состояніи; въ своихъ начальныхъ вертикальныхъ плоскостяхъ останутся только волокна, находившіяся въ плоскостяхъ симметріи призмы. Кривая, представляемая которымъ либо изогнутымъ волокномъ выразится уравненіемъ:

$$\mathrm{y} = y - \frac{a_2}{2}((y^2 - x^2)\varkappa + z^2), \ldots \ldots \ldots \ldots \mathbf{(289)}$$

Предположимъ, что моментъ $Л_x$ отрицательный, тогда a_2 имѣетъ тоже отрицательную величину (пусть $a_2 = -a'_2$) и свободное основаніе призмы наклоняется по положительной оси $У$-овъ. По формуламъ (288) найдемъ, что для центральнаго волокна $\mathrm{x} = 0$, $\mathrm{z} = z$ и что уравненіе его будетъ слѣдующее:

$$\mathrm{z}^2 = \frac{2}{a'_2}\mathrm{y} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \mathbf{(290)}$$

Это — парабола, полупараметръ которой равенъ $(1 : a'_2)$, вершина находится въ началѣ координатъ, а ось направлена по положительной оси $У$; приближенно можно считать эту кривую дугою круга радіуса R равнаго $(1 : a'_2)$. Стрѣлка изгиба центральнаго волокна равна

$$k = a'_2 \frac{l^2}{2}.$$

Уравненія (289) всѣхъ прочихъ волоконъ можно представить такъ:

$$\mathrm{z}^2 = \frac{2}{a'_2}(1 - a'_2 y)^2 (\mathrm{y} - \mathrm{y}_0), \ldots \ldots \ldots \ldots \mathbf{(289)}$$

гдѣ y_0 есть новая ордината начало волокна; это тоже параболы, полупараметры которыхъ менѣе полупараметра центральнаго волокна при положительномъ y и болѣе — при отрицательномъ y.

Положивъ въ равенствахъ (288) $z = c$ получимъ выраженія координатъ точекъ поперечнаго сѣченія $z = c$ при деформированномъ состояніи призмы. Если поступить такимъ же образомъ, какъ въ пунктѣ 1-мъ настоящаго параграфа, т. е. взять за новое начало координатъ точку $\mathrm{z}_1 = c$ и $2\mathrm{y}_1 = a'_2 c^2$, а за новую ось Z касательную въ этой точкѣ къ центральному волокну и назвать черезъ $\mathfrak{z}$ и $\mathfrak{y}$ новыя координаты точекъ

поверхности образуемой сѣченіемъ (причемъ $\mathfrak{x} = \mathrm{x}$), то получимъ слѣдующія выраженія для этихъ координатъ:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{x} &= x + a_2' \varkappa x y, \quad \mathfrak{z} = \frac{(a_2')^2 c\varkappa (y^2 - x^2)}{2\sqrt{1 + (a_2' c)^2}}, \\ \mathfrak{y} &= y\sqrt{1 + (a_2' c)^2} + \frac{a_2' (y^2 - x^2)\varkappa}{2\sqrt{1 + (a_2' c)^2}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(291)}$$

Пренебрегая квадратами и высшими степенями a_2' получимъ $\mathfrak{z} = 0$, т. е., *при ничтожномъ изгибѣ призмы, при которомъ можно пренебрегать квадратами и высшими степенями* a'_2, *всѣ поперечныя сѣченія ея будутъ казаться плоскими и нормальными къ центральному волокну*, которое будетъ имѣть видъ дуги круга.

Предположимъ, что сѣченіе призмы былъ прямоугольникъ, ограниченный сторонами: $x = \pm A$, $y = \pm B$; посмотримъ, какой видъ получили эти стороны при деформаціи.

Пренебрегая квадратами и высшими степенями a'_2, мы найдемъ, изъ формулъ (291), что ординаты $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{y}_2$ techserединъ верхней и нижней сторонъ окажутся равными:

$$\mathfrak{y}_1 = -B + a_2' \varkappa \frac{B^2}{2}, \quad \mathfrak{y}_2 = B + a_2' \varkappa \frac{B^2}{2}$$

и что уравненія самыхъ сторонъ будутъ, верхней и нижней:

$$\mathfrak{x}^2 = \frac{2}{a_2'\varkappa}(1 - 2a_2'\varkappa B)(\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{y}), \quad \mathfrak{x}^2 = \frac{2}{a_2'\varkappa}(1 + 2a_2'\varkappa B)(\mathfrak{y}_2 - \mathfrak{y}).$$

Это параболы, оси которыхъ направлены вверхъ, а вершины находятся въ точкахъ C_1, C_2 (черт. 35-й), бывшихъ серединами сторонъ. Если разсматривать эти кривыя какъ дуги круговъ, то окажется, что центръ верхней дуги находится въ разстояніи $\frac{1}{a'_2\varkappa} - 2B$ отъ точки C_1, а нижней — въ разстояніи $\frac{1}{a_2'\varkappa}$ отъ нея же, такъ что нижняя дуга не концентрична съ верхнею, но центръ ея еще выше чѣмъ нижней.

Координатъ вершинъ A_3 и B_4 будутъ, первый и второй:

$$\mathfrak{x}_3 = A(1 - a_2'\varkappa B), \qquad \mathfrak{x}_4 = A(1 + a_2'\varkappa B)$$

$$\mathfrak{y}_3 = -B + a_2'\varkappa \frac{B^2 - A^2}{2}, \quad \mathfrak{y}_4 = B + a_2'\varkappa \frac{B^2 - A^2}{2};$$

если прямоугольникъ былъ квадратомъ, то ординаты этихъ точекъ будутъ $(-B)$ и $(+B)$.

Обѣ боковыя стороны выражаются однимъ уравненіемъ:

$$\mathfrak{x}^2 = 2A^2 a_2'\varkappa\left(\mathfrak{y} + \frac{1}{2a_2'\varkappa}\right);$$

Эта — парабола, имѣющая вершину на отрицательной оси Y-овъ и весьма малый полупараметръ $A^2 a'_2\varkappa$.

При разсматриваемомъ здѣсь изгибѣ сдвиги $2g_1$ и $2g_2$, какъ видно изъ формулъ (252) и (253) стр. 145, равны нулю, а потому равны также нулю и напряженія T_1 и T_2 во всей призмѣ. Неравны нулю только продольныя напряженія $N_3 = Ea_2y$, которыя имѣютъ отрицательныя величины въ нижнихъ волокнахъ и положительныя — въ верхнихъ. Для произведенія такого изгиба надо приложить къ свободному основанію: къ элементамъ, находящимся на положительной оси Y-овъ, — давленія, а къ элементамъ, находящимся на отрицательной оси Y-овъ — натяженія. Несвободное основаніе можно закрѣпить все въ его деформированномъ состояніи; тогда закрѣпляющія его связи будутъ оказывать соотвѣтственныя реакцій въ каждомъ изъ элементовъ его плоскости.

IX.

О равновѣсіи тонкихъ упругихъ проволокъ.

§ 47. Въ § 34-мъ на стр. 91-й было упомянуто, что мы ограничиваемся разсмотрѣніемъ только такихъ деформацій упругихъ тѣлъ, при которыхъ вокругъ каждой точки тѣла, въ сферѣ дѣйствія исходящихъ изъ нея частичныхъ силъ, совершаются относительныя деформаціи однородныя и ничтожно-малыя.

Примѣняя теорію упругости къ тѣламъ, одно или два измѣренія которыхъ ничтожно-малы, то есть къ весьма тонкимъ пластинкамъ или проволокамъ, мы можемъ разсматривать конечныя, не ничтожно-малыя, деформаціи ихъ длинныхъ размѣровъ, лишь бы только внутреннія деформаціи въ каждомъ изъ ничтожно-малыхъ элементовъ тѣла были ничтожно-малы сравнительно съ его наименьшими размѣрами.

Если разсматриваемое тѣло есть весьма тонкая пластинка, то мы можемъ разсматривать такія упругія деформаціи ея, при которыхъ видъ ея поверхности измѣняется замѣтнымъ образомъ, лишь бы поверхность не получила гдѣ либо излома или весьма крутаго изгиба.

Если разсматриваемое тѣло есть весьма тонкая проволка, то можемъ разсматривать такія упругія деформаціи ея, при которыхъ видъ ея оси измѣняется какъ угодно, лишь бы кривизна и завитіе этой линіи нигдѣ не сдѣлались безконечно большими и закручиваніе каждаго элемента длины проволоки было бы ничтожно-мало.

Въ этой главѣ мы будемъ разсматривать условія равновѣсія упругихъ тонкихъ проволокъ подъ вліяніемъ данныхъ внѣшнихъ силъ.

Подъ именемъ проволоки подразумѣвается такое сплошное тѣло, наружная поверхность котораго можетъ быть представлена слѣдующимъ образомъ:

Вообразимъ себѣ отрѣзокъ кривой линіи какого бы то ни было вида; пусть A и B суть концы этого отрѣзка. Положеніе точки P, находящейся на этой кривой, будемъ выражать разстояніемъ s, считаемымъ отъ точки A вдоль по кривой линіи до точки P; разстоянія, считаемыя отъ A къ B, будемъ выражать положительными величинами.

Возьмемъ какую либо плоскую площадку неизмѣняемаго вида и положимъ что эта площадка движется такъ, что центръ тяжести C ея всегда остается на вышесказанной кривой, нѣкоторая линія CN площадки совпадаетъ съ главною нормалью кри-

ой, а плоскость площадки совпадаетъ съ нормальною плоскостью кривой. Поверхность, образуемая слѣдомъ периметра этой площадки при движенiи точки C вдоль по всей кривой, представляетъ *боковую поверхность правильной проволоки*, поперечное сѣченiе которой одинаково по всей ея длинѣ; на концахъ проволока ограничена плоскостями нормальными къ кривой; направляющую кривую, образуемую центрами тяжести всѣхъ сѣченiй проволоки, мы будемъ называть *осью ея*.

При томъ же видѣ оси проволоки и при томъ же видѣ образующей площадки, мы можемъ получить безчисленное множество другихъ формъ боковыхъ поверхностей; стоитъ только перемѣщать образующую площадку такимъ образомъ, чтобы линiя CN не совпадала съ главными нормалями кривой, а составляла бы съ ними уголъ, измѣняющiйся по тому или другому закону. Такiя проволоки мы условимся называть *неправильными проволоками съ поперечнымъ сѣченiемъ одинаковаго вида и размѣра по всей длинѣ проволоки*.

Наконецъ, если видъ и размѣры образующей площадки измѣняются по какому либо закону сплошнымъ образомъ, то образуется боковая *поверхность проволоки съ поперечнымъ сѣченiемъ неодинаковаго вида по длинѣ ея*.

Мы здѣсь будемъ предполагать, что наибольшiй линейный размѣръ поперечнаго сѣченiя проволоки есть ничтожно-малая величина, которую мы здѣсь обозначимъ черезъ i; это i мы будемъ разсматривать, какъ безконечно-малую величину перваго порядка.

Данъ видъ и положенiе проволоки въ предварительномъ состоянiи; требуется опредѣлить, какой видъ приметъ ось ея, если къ проволокѣ будутъ приложены данныя объемныя силы, а къ концамъ ея — данныя внѣшнiя напряженiя, причемъ одинъ изъ концовъ можетъ быть закрѣпленъ, какъ указано въ предыдущей главѣ.

§ 48. Проволока, ось которой въ предварительномъ состоянiи была прямолинейною. Величины, опредѣляющiя положенiя элементовъ проволоки въ деформированномъ состоянiи.

Мы разсмотримъ сначала вопросы о деформацiи упругой проволоки, ось которой въ предварительномъ состоянiи была прямою линiею, которую мы возьмемъ за ось Z-овъ; начало координатъ помѣстимъ на одномъ изъ концовъ проволоки.

Чтобы опредѣлить видъ, принимаемый проволокою при дѣйствiи данныхъ силъ и напряженiй, надо прежде всего мысленно раздробить проволоку на элементы по оси ея и составить уравненiя равновѣсiя, для каждаго изъ этихъ элементовъ, тѣхъ силъ, которыя къ нему приложены, а именно: объемныхъ силъ и напряженiй, дѣйствующихъ сквозь его оконечности со стороны сосѣднихъ элементовъ. Размѣры элементовъ по длинѣ проволоки мы предположимъ сравнимыми съ i, т. е. порядка малости этой величины.

При составленiи уравненiй равновѣсiя силъ, приложенныхъ къ элементамъ, надо имѣть въ виду, что главный векторъ объемныхъ силъ, приложенныхъ ко всему элементу, имѣетъ измѣренiя того же порядка малости, какъ и самый объемъ его, т. е., порядка i^3, напряженiя же, приложенныя къ концамъ элемента, имѣютъ измѣренiя этихъ площадей сѣченiй, т. е. измѣренiя порядка i^2. При этомъ предполагается, что величины объемныхъ силъ, разсчитанныя на единицу массы, и величины напряженiй, разсчитанныя на единицу площади, конечны, а не безконечно-велики. Вообще, при составленiи уравненiй равновѣсiя или движенiя элементовъ, необходимо принять въ разсчетъ измѣренiя всѣхъ входящихъ въ уравненiя величинъ.

Каждый элементъ проволоки разсматривается какъ призма въ Санъ-Венановой задачѣ, такъ что деформированное состоянiе всѣхъ точекъ его выражается тѣми формулами, которыя выведены при рѣшенiи этой задачи; но для этого необходимо отнести каждый элементъ, въ его деформированномъ состоянiи, къ особымъ для него координатнымъ осямъ, одна изъ которыхъ совпадаетъ съ касательною къ оси элемента.

Пусть x, y, z суть координаты, относительно неподвижныхъ осей, той точки P оси, которая находится на концѣ элемента ближайшемъ къ началу проволоки. Въ предварительномъ состоянiи эта точка находилась отъ O въ разстоянiи c по оси Z-овъ, а теперь находится въ разстоянiи s отъ начала проволоки, считая разстоянiя по искривленной оси ея. Координаты x, y, z суть функцiи отъ c, но $(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2$, равное $(ds)^2$, не равно $(dc)^2$ (гдѣ dc есть длина элемента въ предварительномъ состоянiи), потому что элементы въ деформированномъ состоянiи измѣнили свои длины противу первоначальныхъ; положимъ, что линейное удлинненiе единицы длины оси элемента есть ε, т. е.

$$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2=(dc)^2\,(1+\varepsilon)^2;$$

удлинненiе ε должно разсматривать тоже какъ функцiю отъ c.

Касательная въ точкѣ P къ оси проволоки образуетъ съ осями координатъ X, Y, Z углы, косинусы которыхъ суть:

$$\frac{dx}{ds}=\frac{dx}{dc}(1-\varepsilon),\ \frac{dy}{ds}=\frac{dy}{dc}(1-\varepsilon),\ \frac{dz}{ds}=\frac{dz}{dc}(1-\varepsilon),\ \ldots\ldots\ \mathbf{(292)}$$

пренебрегая квадратами и высшими степенями ничтожно-малыхъ удлинненiй ε.

При предварительномъ состоянiи проволоки проведемъ черезъ точку P двѣ линiи PX' и PY' параллельныя осямъ координатъ и означимъ черезъ $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ координаты какой либо точки элемента относительно этихъ осей и оси PZ', совпадающей съ осью Z-овъ. При деформацiи проволоки точка P получитъ положенiе, выражаемое координатами x, y, z, прежняя прямолинейная ось элемента будетъ обращена въ элементъ кривой линiи s, а прежнiя линiи PX' и PY' вообще не будутъ перпендикулярны къ касательной, проведенной изъ точки P къ искривленной оси элемента. Возьмемъ эту касательную за ось Z, а за ось Ξ возьмемъ направленiе перпендикулярное къ Z и проведенное черезъ точку P въ той плоскости, которая проходитъ черезъ ось Z и черезъ линiю PX'. Означимъ черезъ ξ, η, ζ координаты точекъ деформированнаго элемента по отношенiю къ этимъ осямъ; разности $\xi-\mathfrak{x}$, $\eta-\mathfrak{y}$, $\zeta-\mathfrak{z}$ будемъ обозначать черезъ u, v, w.

Косинусы угловъ λ_x, λ_y, λ_z, μ_x, μ_y, μ_z, ν_x, ν_y, ν_z, составляемыхъ осями Ξ, Υ, Z въ разныхъ точкахъ деформированной оси проволоки съ осями X, Y, Z выразятся въ трехъ углахъ ϕ, ж и э также какъ и въ кинематикѣ твердаго тѣла.

Такъ какъ эти углы ϕ, ж и э измѣняются вдоль по оси проволоки, то ихъ должно разсматривать, какъ функцiи отъ c; поэтому и косинусы:

$$\lambda_x,\ \lambda_y,\ \lambda_z,\ \mu_x,\ \mu_y,\ \mu_z,\ \nu_x,\ \nu_y,\ \nu_z$$

будутъ функцiями отъ c.

Абсолютныя координаты x, y, z какой либо точки элемента при деформированномъ состоянiи проволоки выразятся, по извѣстнымъ формуламъ преобразованiя координатъ, такъ:

$$
\left.\begin{aligned}
\mathrm{x} &= x + (\mathfrak{x} + u)\,\lambda_x + (\mathfrak{y} + v)\,\mu_x + (\mathfrak{z} + w)\,\nu_x,\\
\mathrm{y} &= y + (\mathfrak{x} + u)\,\lambda_y + (\mathfrak{y} + v)\,\mu_y + (\mathfrak{z} + w)\,\nu_y,\\
\mathrm{z} &= z + (\mathfrak{x} + u)\,\lambda_z + (\mathfrak{y} + v)\,\mu_z + (\mathfrak{z} + w)\,\nu_z.
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(\mathbf{293})
$$

Здѣсь u, v, w въ каждомъ элементѣ проволоки суть функціи отъ $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$; вмѣстѣ съ тѣмъ эти величины суть функціи и отъ c, такъ какъ онѣ измѣняются также при переходѣ отъ одного элемента къ другому. Такъ какъ проволока образуетъ сплошное тѣло, то должна существовать зависимость между производными отъ u, v, w по $\mathfrak{z}$ и производными отъ нихъ по c.

Для того, чтобы найти эту зависимость, примемъ во вниманіе, что x, y, z, какъ координаты относительно осей X, Y, Z точекъ проволоки въ деформированномъ ея состояніи должны быть функціями начальныхъ координатъ $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $(c + \mathfrak{z})$; въ виду того, что онѣ должны быть функціями отъ суммы $(c + \mathfrak{z})$, мы должны заключить, что производныя отъ x, y, z по c должны быть равны производнымъ по $\mathfrak{z}$; вслѣдствіе этого получимъ слѣдующія равенства:

$$
\lambda_x\left(\frac{du}{d\mathfrak{z}} - \frac{du}{dc}\right) + \mu_x\left(\frac{dv}{d\mathfrak{z}} - \frac{dv}{dc}\right) + \nu_x\left(\frac{dw}{d\mathfrak{z}} - \frac{dw}{dc}\right) =
$$

$$
= \varepsilon\nu_x + \frac{d\lambda_x}{dc}(\mathfrak{x} + u) + \frac{d\mu_x}{dc}(\mathfrak{y} + v) + \frac{d\nu_x}{dc}(\mathfrak{z} + w),\ldots\ldots(\mathbf{294,\ 1})
$$

$$
\lambda_y\left(\frac{du}{d\mathfrak{z}} - \frac{du}{dc}\right) + \mu_y\left(\frac{dv}{d\mathfrak{z}} - \frac{dv}{dc}\right) + \nu_y\left(\frac{dw}{d\mathfrak{z}} - \frac{dw}{dc}\right) =
$$

$$
= \varepsilon\nu_y + \frac{d\lambda_y}{dc}(\mathfrak{x} + u) + \frac{d\mu_y}{dc}(\mathfrak{y} + v) + \frac{d\nu_y}{dc}(\mathfrak{z} + w),\ldots\ldots(\mathbf{294,\ 2})
$$

$$
\lambda^z\left(\frac{du}{d\mathfrak{z}} - \frac{du}{dc}\right) + \mu_z\left(\frac{dv}{d\mathfrak{z}} - \frac{dv}{dc}\right) + \nu_z\left(\frac{dw}{d\mathfrak{z}} - \frac{dw}{dc}\right) =
$$

$$
= \varepsilon\nu_z + \frac{d\lambda_z}{dc}(\mathfrak{x} + u) + \frac{d\mu_z}{dc}(\mathfrak{y} + v) + \frac{d\nu_z}{dc}(\mathfrak{z} + w)\ldots\ldots\ldots(\mathbf{294,\ 3})
$$

Здѣсь ε вошло потому, что производныя отъ x, y, z по c замѣнены (по формуламъ (292)) произведеніями $\nu_x\ (1 + \varepsilon)$, $\nu_y\ (1 + \varepsilon)$, $\nu_z\ (1 + \varepsilon)$.

Рѣшивъ равенства (294) относительно разностей производныхъ по $\mathfrak{z}$ и по c и принявъ во вниманіе извѣстныя соотношенія между косинусами λ_x, λ_y, ... ν_z, получимъ слѣдующія выраженія для этихъ разностей:

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{du}{d\mathfrak{z}} &= \frac{du}{dc} + (\mathfrak{z} + w)\,q - (\mathfrak{y} + v)\,r\\
\frac{dv}{d\mathfrak{z}} &= \frac{dv}{dc} + (\mathfrak{x} + u)\,r - (\mathfrak{z} + w)\,p\\
\frac{dw}{d\mathfrak{z}} &= \frac{dw}{dc} + (\mathfrak{y} + v)\,p - (\mathfrak{x} + u)\,q + \varepsilon
\end{aligned}\right\},\ldots\ldots\ldots(\mathbf{295})
$$

гдѣ p, q и r суть слѣдующія выраженія:

$$p = \nu_x \frac{d\mu_x}{dc} + \nu_y \frac{d\mu_y}{dc} + \nu_z \frac{d\mu_z}{dэ} \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(296,\ 1)}$$

$$q = \lambda_x \frac{d\nu_x}{dc} + \lambda_y \frac{d\nu_y}{dc} + \lambda_z \frac{d\nu_z}{dc} \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(296,\ 2)}$$

$$r = \mu_x \frac{d\lambda_x}{dc} + \mu_y \frac{d\lambda_y}{dc} + \mu_z \frac{d\lambda_z}{dc} \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(296,\ 3)}$$

§ 49. Уравненія равновѣсія элементовъ проволоки.

Согласно съ тѣмъ, что было высказано въ первыхъ главахъ этой книги, приложенныя къ каждому элементу проволоки внѣшнія объемныя силы и напряженія, дѣйствующія на его оконечности со стороны сосѣднихъ элементовъ, должны взаимно-уравновѣшиваться.

Означимъ черезъ B_x, B_y, B_z, $Л_x$, $Л_y$, $Л_z$ проэкціи на оси X, $У$, Z главнаго вектора и главнаго момента напряженій, дѣйствующихъ сквозь все поперечное сѣченіе проволоки, проведенное въ точкѣ P $(x,\ y,\ z,\ s)$ оси ея; притомъ это суть напряженія, дѣйствующія сквозь это сѣченіе съ той стороны, гдѣ s больше чѣмъ въ P, на ту сторону, гдѣ s меньше чѣмъ въ P. Означимъ черезъ B_ξ, B_η, B_ζ, $Л_\xi$, $Л_\eta$, $Л_\zeta$ проэкціи того же главнаго вектора и того же главнаго момента на оси Ξ, Υ, Z. *Моменты напряженій берутся вокругъ точки* P.

Этотъ главный векторъ B и этотъ главный моментъ $Л$ должны быть сплошными функціями координатъ точки P или величины s, опредѣляющей мѣсто этой точки на оси проволоки, такъ что на другомъ концѣ элемента, въ точкѣ P_1 $(s + ds)$, проэкція на оси X-овъ вектора напряженій, дѣйствующаго сквозь проведенное здѣсь сѣченіе на внутреннія частицы элемента, будетъ равно:

$$B_x + \frac{dB_x}{ds} ds.$$

Проэкція на ту же ось главнаго момента тѣхъ же напряженій вокругъ точки P_1 будетъ:

$$Л_x + \frac{dЛ_x}{ds} ds,$$

а проэкція главнаго момента тѣхъ же напряженій вокругъ точки P будетъ равна:

$$Л_x + \frac{dЛ_x}{ds} ds + (\nu_y B_z - \nu_z B_y)\, ds,$$

потому что разности между координатами точки P и точки P_1 выразятся величинами $-\nu_x ds$, $-\nu_y ds$, $-\nu_z ds$, отбрасывая члены высшихъ порядковъ малости.

Проэкціи главнаго вектора объемныхъ силъ, приложенныхъ къ элементу, могутъ быть выражены такимъ образомъ:

$$\sigma\mathfrak{B}_x ds,\ \sigma\mathfrak{B}_y ds,\ \sigma\mathfrak{B}_z ds,$$

...гдѣ σ есть плотность вещества проволоки въ точкѣ P, а $\mathfrak{B}$ суть интегралы, распространенные на площади сѣченія въ точкѣ P:

$$\mathfrak{B}_x = \iint \mathfrak{X} d\omega, \quad \mathfrak{B}_y = \iint \mathfrak{Y} d\omega, \quad \mathfrak{B}_z = \iint \mathfrak{Z} d\omega.$$

Произведенія $\sigma\mathfrak{B}$ можно разсматривать какъ объемныя силы, разсчитанныя на единицу длины проволоки.

Подобнымъ же образомъ и проэкціи на оси X, Y, Z момента вокругъ точки P объемныхъ силъ, приложенныхъ къ элементу ds, будемъ обозначать черезъ:

$$\sigma\mathfrak{L}_x ds, \quad \sigma\mathfrak{L}_y ds, \quad \sigma\mathfrak{L}_z ds.$$

Выразимъ, что сумма проэкцій на ось X-овъ напряженій, приложенныхъ къ концамъ элемента, и объемныхъ силъ къ нему приложенныхъ, равна нулю; получимъ:

$$-B_x + B_x + \frac{dB_x}{ds} ds + \sigma\mathfrak{B}_x ds = 0.$$

Такимъ образомъ составимъ шесть дифференціальныхъ уравненій для каждой точки оси проволоки:

$$\frac{dB_x}{ds} + \sigma\mathfrak{B}_x = 0, \quad \frac{dB_y}{ds} + \sigma\mathfrak{B}_y = 0, \quad \frac{dB_z}{ds} + \sigma\mathfrak{B}_z = 0 \quad \ldots\ldots (\mathbf{297})$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dЛ_x}{ds} + \nu_y B_z - \nu_z B_y + \sigma\mathfrak{L}_x = 0, \\ &\frac{dЛ_y}{ds} + \nu_z B_x - \nu_x B_z + \sigma\mathfrak{L}_y = 0, \\ &\frac{dЛ_z}{ds} + \nu_x B_y - \nu_y B_x + \sigma\mathfrak{L}_z = 0, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (\mathbf{298})$$

гдѣ:

$$B_x = B_\xi \lambda_x + B_\eta \mu_x + B_\zeta \nu_x, \quad Л_x = Л_\xi \lambda_x + Л_\eta \mu_x + Л_\zeta \nu_x, \ldots$$

На основаніи извѣстныхъ зависимостей между девятью косинусами, а также и между ихъ производными, можно рѣшить эти уравненія относительно производныхъ по s отъ B_ξ, B_η, B_ζ, $Л_\xi$, $Л_\eta$, $Л_\zeta$ и тогда получимъ слѣдующія дифференціальныя уравненія:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dB_\xi}{ds} + B_\zeta q_1 - B_\eta r_1 + \sigma(\mathfrak{B}_x\lambda_x + \mathfrak{B}_y\lambda_y + \mathfrak{B}_z\lambda_z) = 0, \\ &\frac{dB_\eta}{ds} + B_\xi r_1 - B_\zeta p_1 + \sigma(\mathfrak{B}_x\mu_x + \mathfrak{B}_y\mu_y + \mathfrak{B}_z\mu_z) = 0, \\ &\frac{dB_\zeta}{ds} + B_\eta p_1 - B_\xi q_1 + \sigma(\mathfrak{B}_x\nu_x + \mathfrak{B}_y\nu_y + \mathfrak{B}_z\nu_z) = 0, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (\mathbf{299})$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dЛ_\xi}{ds}+Л_\zeta q_1-Л_\eta r_1-B_\eta+\sigma(\mathfrak{L}_x\lambda_x+\mathfrak{L}_y\lambda_y+\mathfrak{L}_z\lambda_z)=0,\\&\frac{dЛ_\eta}{ds}+Л_\xi r_1-Л_\zeta p_1+B_\xi+\sigma(\mathfrak{L}_x\mu_y+\mathfrak{L}_y\mu_y+\mathfrak{L}_z\mu_z)=0,\\&\frac{dЛ_\zeta}{d\rho}+Л_\eta p_1-Л_\xi q_1+\sigma(\mathfrak{L}_x\nu_x+\mathfrak{L}_y\nu_y+\mathfrak{L}_z\nu_z)=0,\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(300)$$

здѣсь:

$$p_1=p\,(1-\varepsilon),\ q_1=q\,(1-\varepsilon),\ r_1=r\,(1-\varepsilon).$$

Въ томъ или другомъ видѣ, эти шесть дифференціальныхъ уравненій заключаютъ 9 неизвѣстныхъ функцій отъ s, когда видъ искривленной проволоки неизвѣстенъ. Въ самомъ дѣлѣ, кромѣ трехъ изъ девяти косинусовъ λ_x, $\lambda_y, \ldots \nu_z$, здѣсь входятъ еще шесть функцій B_ξ, B_η, B_ζ, $Л_\xi$, $Л_\eta$, $Л_\zeta$. Однако, если разсмотрѣть значенія величинъ p, q, r и предположить, что каждый элементъ деформируется по тому же закону, какъ призма въ задачѣ С. Венана, то окажется, что моменты $Л_\xi$, $Л_\eta$, $Л_\zeta$ могутъ быть выражены въ p, q и r.

§ 50. Зависимость между величинами p, q, r и моментами $Л$.

Представимъ себѣ, что вдоль по искривленной оси проволоки перемѣщается точка $Ю$, которая служитъ началомъ трехъ координатныхъ осей: Z, направляющейся по касательной къ оси проволоки, въ сторону возрастающихъ s, оси Ξ', направляющейся по главной нормали кривой къ центру кривизны и Υ', направляющейся по бинормали. Означимъ черезъ ν_x, ν_y, ν_z, Λ_x, Λ_y, Λ_z, M_x, M_y, M_z косинусы угловъ, составляемыхъ этими осями съ осями координатъ.

Такъ какъ первые шесть косинусовъ могутъ быть выражены слѣдующими производными:

$$\nu_x=\frac{dx}{ds},\ \nu_y=\frac{dy}{ds},\ \nu_z=\frac{dz}{ds},\ \Lambda_x=\rho\frac{d^2x}{ds^2},\ \Lambda_y=\rho\frac{d^2y}{ds^2},\ \Lambda_z=\rho\frac{d^2z}{ds^2},$$

гдѣ ρ есть радіусъ кривизны кривой въ точкѣ $Ю$, то три послѣдніе косинуса выразятся такъ:

$$\mathrm{M}_x=\rho\left(\frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}-\frac{dz}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\right),\ \mathrm{M}_y=\rho\left(\frac{dz}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{dx}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\right),\ \mathrm{M}_z=\rho\left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\right).$$

Величина $(1:l)$, равная слѣдующему корню:

$$\frac{1}{l}=\sqrt{\left(\frac{d\mathrm{M}_x}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\mathrm{M}_y}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\mathrm{M}_z}{ds}\right)^2},$$

выражаетъ *завитіе* кривой линіи въ той точкѣ, въ которой находится точка $Ю$ *).

---

*) См. Кинематич. часть составленнаго мною курса аналитической механики, стр. 259, 260.

Составивъ выраженія:

$$p' = \nu_x \frac{dM_x}{ds} + \nu_y \frac{dM_y}{ds} + \nu_z \frac{dM_z}{ds} = -\left(M_x \frac{d\nu_x}{ds} + M_y \frac{d\nu_y}{ds} + M_z \frac{d\nu_z}{ds}\right)$$

$$q' = \Lambda_x \frac{d\nu_x}{ds} + \Lambda_y \frac{d\nu_y}{ds} + \Lambda_z \frac{d\nu_z}{ds},$$

найдемъ, что $p' = 0$ и что $q' = (1:\rho)$.

Величины производныхъ по s отъ косинусовъ M_x, M_y, M_z, помноженныя на l, выражаютъ косинусы угловъ, составляемыхъ съ осями координатъ вращательною скоростью точки, находящейся на бинормали въ разстояніи равномъ единицѣ отъ точки *Ю*. Очевидно, что эта вращательная скорость перпендикулярна къ оси Υ', но кромѣ того, она перпендикулярна также и къ оси Z, какъ видно изъ того, что $p' = 0$. (Если одно изъ двухъ выраженій для p' помножить на l, то получимъ выраженіе косинуса угла, составляемаго направленіемъ вращательной скорости вышесказанной точки съ осью Z). Слѣдовательно эта вращательная скорость либо параллельная оси Ξ', либо противоположна ей; а потому:

$$l\frac{dM_x}{ds} = \mp \rho \frac{d^2x}{ds^2},\quad l\frac{dM_y}{ds} = \mp \rho \frac{d^2y}{ds^2},\quad l\frac{dM_z}{ds} = \mp \rho \frac{d^2z}{ds^2}.$$

Составивъ теперь выраженіе:

$$r' = -\left(\Lambda_x \frac{dM_x}{ds} + \Lambda_y \frac{dM_y}{ds} + \Lambda_z \frac{dM_z}{ds}\right),$$

найдемъ, что $r' = \pm(1:l)$.

Такъ какъ p', q' и r' суть проэкціи угловой скорости воображаемаго твердаго тѣла, неизмѣнно связаннаго съ осями Ξ', Υ' и Z, на эти оси, то изъ предыдущаго получается слѣдующая теорема кинематики.

Если твердое тѣло движется такимъ образомъ, что какая либо точка его описываетъ съ постоянною скоростью какую либо непрерывную кривую и нѣкоторая ось тѣла (Z), *проведенная черезъ эту точку, направлена по касательной къ этой кривой, а другая ось* (Ξ') *направлена по главной нормали кривой, то угловая скорость тѣла всегда заключается въ плоскости осей* Υ' *и* Z *и притомъ проэкція угловой скорости на бинормаль равна кривизнѣ* $(1:\rho)$, *а проэкція ея на касательную равна завитію* $(1:l)$.

Предположимъ себѣ теперь, что черезъ ту же точку *Ю* проведены двѣ другія взаимно-перпендикулярныя и ортогональныя къ Z оси Ξ и Υ, которыя, при движеніи точки *Ю*, вращаются въ плоскости $\Xi'\Upsilon'$ по совершенно произвольному закону; пусть φ есть уголъ составляемый между собою осями Ξ и Ξ' и $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ — уголъ, составляемый между собою осями Ξ и Υ'. Пусть λ_x, λ_y, λ_z, μ_x, μ_y, μ_z означаютъ косинусы угловъ, составляемыхъ этими осями Ξ, Υ съ неподвижными осями X, $У$, Z. Между этими косинусами и тѣми, которые обозначены большими буквами, существуетъ нѣкоторая простая зависимость.

Означивъ черезъ ψ_1 сферическій уголъ $X\Xi\Xi'$ (чертежъ 36), составимъ для сферическихъ треугольниковъ $\Upsilon'\Xi X$ и $\Xi\Xi' X$ слѣдующія два равенства:

$$M_x = \lambda_x \sin\varphi - \cos\varphi \sqrt{1-\lambda_x^2}\cos\psi_1;$$

$$\Lambda_x = \lambda_x \cos\varphi + \sin\varphi \sqrt{1-\lambda_x^2}\cos\psi_1,$$

изъ которыхъ получимъ:

$$\lambda_x = M_x \sin\varphi + \Lambda_x \cos\varphi.$$

Подобнымъ же образомъ получимъ:

$$\mu_x = M_x \cos\varphi - \Lambda_x \sin\varphi.$$

Подобнаго же вида соотношенія между косинусами угловъ, составляемыхъ этими осями съ другими двумя неподвижными осями $У$ и Z, т. е.: $\lambda_y = M_y \sin\varphi + \Lambda_y \cos\varphi$, и проч.

Вслѣдствіе этого окажется, что p_1, q_1 и r_1 выразятся слѣдующимъ образомъ:

$$p_1 = -\left(\mu_x \frac{d\nu_x}{ds} + \mu_y \frac{d\nu_y}{ds} + \mu_z \frac{d\nu_z}{ds}\right) = q' \sin\varphi = \frac{\sin\varphi}{\rho},$$

$$q_1 = \left(\lambda_x \frac{d\nu_x}{ds} + \lambda_y \frac{d\nu_y}{ds} + \lambda_z \frac{d\nu_z}{ds}\right) = q' \cos\varphi = \frac{\cos\varphi}{\rho},$$

$$r_1 = \mu_x \frac{d\lambda_x}{ds} + \mu_y \frac{d\lambda_y}{ds} + \mu_z \frac{d\lambda_z}{ds} = r' + \frac{d\varphi}{ds} = \pm\frac{1}{l} + \frac{d\varphi}{ds}.$$

Слѣдовательно ($-p_1$) и q_1 суть кривизны проэкцій оси проволки на плоскости $Z\Upsilon$ и $Z\Xi$, а r_1 есть сумма завитія оси проволки съ закручиваніемъ плоскости $\Xi\Upsilon$ относительно плоскости кривизны кривой.

Вернемся теперь къ формуламъ (248)—(250) стр. 145, выражающимъ перемѣщенія точекъ призмы, закрѣпленной на одномъ концѣ и подверженной внѣшнимъ напряженіямъ на другомъ. Примѣнимъ эти формулы къ точкамъ элемента, разсматривая элементъ какъ призму, закрѣпленный конецъ которой есть поперечное сѣченіе проволки черезъ точку P, а свободный—такое же сѣченіе черезъ точку P_1 $(s+ds)$; замѣнимъ x, y, z въ формулахъ (248)—(250) черезъ $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ и $\mathfrak{z}$. Составимъ выраженія для координатъ $\mathfrak{x}+u$, $\mathfrak{y}+v$, $\mathfrak{z}+w$ точекъ оси элемента; они будутъ:

$$\mathfrak{x}+u = -a_1\frac{\mathfrak{z}^2}{2} - b_1\frac{\mathfrak{z}^3}{6},\quad \mathfrak{y}+v = -a_2\frac{\mathfrak{z}^2}{2} - b_2\frac{\mathfrak{z}^3}{6},\quad \mathfrak{z}+w = \mathfrak{z}(1+a),$$

здѣсь положены β_1 и β_2 равными нулю, такъ какъ ось элемента касательна къ оси Z въ точкѣ P.

Означимъ эти координаты черезъ ξ, η, ζ. Уравненія проэкцій оси элемента на плоскости $Z\Xi$ у $Z\Upsilon$ будутъ:

$$\xi = -\frac{a_1}{(1+a)^2}\frac{\zeta^2}{2} - \frac{b_1}{(1+a)^3}\frac{\zeta^3}{6},\quad \eta = -\frac{a_2}{(1+a)^2}\frac{\zeta^2}{2} - \frac{b_2}{(1+a)^3}\frac{\zeta^3}{6}.$$

Кривизны этихъ кривыхъ въ точкѣ P будутъ слѣдующія:

$$\frac{d^2\xi}{d\zeta^2} = -\frac{a_1}{(1+a)^2}, \quad \frac{d^2\eta}{d\zeta^2} = -\frac{a_2}{(1+a)^2}.$$

Линейное удлинненіе по оси равно $\frac{\partial\zeta}{\partial\mathfrak{z}}$, т. е. a; это есть то самое, что мы обозначали черезъ ε и предполагали величиною ничтожною.

Изъ вышесказаннаго слѣдуетъ, что:

$$p_1 = p\,(1-\varepsilon) = \frac{a_2}{(1+a)^2}, \quad q_1 = q\,(1-\varepsilon) = -\frac{a_1}{(1+a)^2}.$$

Для того, чтобы относительныя деформаціи въ каждомъ элементѣ проволоки были ничтожно-малы сравнительно съ размѣрами элемента (а размѣры имѣютъ измѣреніе ничтожно-малой длины i), необходимо, чтобы u, v, w имѣли измѣренія i^2 или квадратовъ координатъ $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$; слѣдовательно тѣ коэфиціенты въ выраженіяхъ u, v, w, которые помножены на первыя степени этихъ координатъ, должны имѣть измѣренія ничтожно-малой величины i, тѣ же коэфиціенты, которые помножены на вторыя степени или на произведенія координатъ $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, могутъ быть величинами конечными; наконецъ тѣ коэфиціенты, которые помножены на третьи степени координатъ, могутъ быть весьма большими величинами порядка $(1:i)$.

Въ формулахъ (248)—(250) коэфиціенты, помноженные на первые степени координатъ, суть a, β_1 и β_2; на вторыя степени координатъ помножены: a_1, a_2 и α и на третьи степени: b_1 и b_2.

Поэтому, для того чтобы элементы проволоки получили деформаціи ничтожныя сравнительно съ размѣрами самихъ элементовъ, необходимо, чтобы a или ε было измѣренія не выше i, чтобы a_1, a_2 и α были конечные и чтобы b_1 и b_2 были измѣренія не ниже $(1:i)$.

Предположимъ, что плоскости $\mathsf{Z\Xi}$, $\mathsf{Z\Upsilon}$ заключаютъ въ себѣ главныя оси инерціи поперечнаго сѣченія проволоки, проведеннаго черезъ точку P; тогда, по формуламъ (261) стр. 146, коэфиціенты a_1, a_2, a, b_1 и b_2 выразятся такъ:

$$a_1 = -\frac{Л_\eta}{E\mathfrak{A}_c}, \quad a_2 = \frac{Л_\xi}{E\mathfrak{B}_c}, \quad a = \frac{B_\zeta}{ES}, \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(301)}$$

$$b_1 = \frac{B_\xi}{E\mathfrak{A}_c}, \quad b_2 = \frac{B_\eta}{E\mathfrak{B}_c}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(301)}$$

Коэфиціентъ же крученія α, по формулѣ (271), разнится отъ отношенія:

$$\frac{Л_\zeta}{K\,(\mathfrak{A}_c + \mathfrak{B}_c)}$$

членами, видъ которыхъ зависитъ отъ формы сѣченія.

Такъ какъ площадь S поперечнаго сѣченія проволоки имѣетъ измѣренія i^2, а моменты инерціи ея имѣютъ измѣренія i^4, то для того, чтобы коэфиціенты a, a_1, a_2, α, b_1, b_2, имѣли вышесказанныя измѣренія, необходимо, чтобы моменты $Л_\xi$, $Л_\eta$, $Л_\zeta$ были измѣренія i^4, а векторы B_ξ, B_η, B_ζ — измѣренія i^3. При такихъ только напряженіяхъ,

деформаціи элементовъ проволоки будутъ ничтожно-малы сравнительно съ размѣрами поперечныхъ сѣченій ея.

Пренебрегая ничтожно-малыми величинами сравнительно съ конечными величинами, мы заключимъ, что

$$p = p_1 = \frac{Л_\xi}{E\mathfrak{B}_c},\ q = q_1 = \frac{Л_\eta}{E\mathfrak{A}_c}, \ldots \ldots \ldots \ldots (302)$$

Что касается до r_1 или r, то очевидно, что это есть величина крученія проволоки на единицу длины ея оси, т. е.: α и поэтому:

$$r = r_1 = \frac{Л_\zeta}{K(\mathfrak{A}_c + \mathfrak{B}_c)} \ldots \ldots \ldots \ldots (303)$$

§ 51. Различные случаи равновѣсія проволокъ, неподверженныхъ объемнымъ силамъ.

Примѣнимъ дифференціальныя уравненія § 49-го къ упругой проволокѣ, бывшей въ предварительномъ состояніи прямою и неподверженной никакимъ объемнымъ силамъ вдоль по всему ея протяженію. Предполагается, что такая проволка находится въ деформированномъ состояніи только подъ вліяніемъ внѣшнихъ напряженій, приложенныхъ къ концамъ ея.

Изъ уравненій (297) § 49-го будетъ слѣдовать, что въ этихъ случаяхъ B_x, B_y, B_z должны быть постоянны по всей длинѣ ея. Такъ какъ положеніе осей X, $У$ и Z произвольно, то расположимъ ихъ такъ, чтобы постоянныя, которымъ равны B_x и B_y были равны нулю; тогда:

$$\left.\begin{array}{l} B_\xi \lambda_x + B_\eta \mu_x + B_\zeta \nu_x = 0 \\ B_\xi \lambda_y + B_\eta \mu_y + B_\zeta \nu_y = 0 \\ B_\xi \lambda_z + B_\eta \mu_z + B_\zeta \nu_z = C \end{array}\right\} \ldots \ldots \ldots \ldots (304)$$

Отсюда:

$$B_\xi = \lambda_z C,\ B_\eta = \mu_z C,\ B_\zeta = \nu_z C.$$

По формуламъ (302) и (303) замѣнимъ въ уравненіяхъ (300) § 49-го моменты $Л_\xi$, $Л_\eta$, $Л_\zeta$ слѣдующими величинами:

$$Л_\xi = E\mathfrak{B}_c p,\ Л_\eta = E\mathfrak{A}_c q,\ Л_\zeta = E\mathfrak{C}_c r,$$

гдѣ

$$\mathfrak{C}_c = \frac{K}{E}(\mathfrak{A}_c + \mathfrak{C}_c), \ldots \ldots \ldots \ldots (305)$$

причемъ значки c внизу буквъ будутъ, для краткости, отброшены; вслѣдствіе этого уравненія (300) примутъ слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{B}\frac{dp}{ds}&=(\mathfrak{A}-\mathfrak{C})\,qr+C_1\mu_z\\ \mathfrak{A}\frac{dq}{ds}&=(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})\,rp-C_1\lambda_z\\ \mathfrak{C}\frac{dr}{ds}&=(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})\,pq,\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\textbf{(306)}$$

гдѣ $C_1 = C:E$.

Такъ какъ кривизна и крученіе проволоки должны быть конечны по всей длинѣ ея, то должны быть конечны p, q, r и ихъ производныя по s, а потому члены уравненій (306), заключающіе эти величины, будутъ измѣренія i^4 (такъ какъ таковы измѣренія моментовъ инерціи $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$). То же самое измѣреніе должна имѣть и C_1, т. е. величина напряженія; она должна быть порядка i^4, не ниже.

Уравненія (306) аналогичны Эйлеровымъ дифференціальнымъ уравненіямъ вращенія тяжелаго твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки, находящейся на одной изъ главныхъ центральныхъ осей инерціи тѣла, предполагая, что тяжесть дѣйствуетъ параллельно отрицательной оси Z-овъ (если C_1 положительное). Разсмотримъ различные случаи, въ которыхъ уравненія (306) могутъ быть рѣшены и прослѣдимъ аналогію такихъ случаевъ съ соотвѣтствующими случаями вращенія тѣлъ.

1. Начнемъ съ тѣхъ случаевъ, въ которыхъ ось проволоки образуетъ плоскую кривую въ плоскости ZY, причемъ ось Υ заключается въ той же самой плоскости.

Тогда изъ девяти косинусовъ четыре: λ_y, λ_z, μ_x, ν_x равны нулю, одинъ: λ_x равенъ единицѣ, а остальные выражаются въ углѣ φ, составляемомъ осью $\mathbf{Z}$ съ осью Z, а именно: $\mu_y = \cos\varphi$, $\mu_z = -\sin\varphi$, $\nu_y = \sin\varphi$, $\nu_z = \cos\varphi$. Поэтому q и r равны нулю, а $p = -\frac{d\varphi}{ds}$.

Изъ трехъ дифференціальныхъ уравненій (306) остается только первое, которое можетъ быть представлено въ слѣдующемъ видѣ:

$$\mathfrak{B}\frac{dp}{ds} = -C_1\frac{dy}{ds}.$$

Интегрируя это уравненіе и предполагая, что начало координатъ взято въ той точкѣ, гдѣ $p = 0$, получимъ $\mathfrak{B}p = -C_1 y$. Означивъ черезъ ρ радіусъ кривизны кривой и принявъ во вниманіе, что (какъ слѣдуетъ изъ предыдущаго параграфа) въ настоящемъ случаѣ $(-p) = 1:\rho$, получимъ слѣдующее дифференціальное уравненіе кривой линіи, образуемой осью проволоки въ изогнутомъ состояніи:

$$\rho = \frac{\mathfrak{B}}{C_1}\frac{1}{y}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\textbf{(307)}$$

выражающее, что радіусъ кривизны оси проволоки въ разныхъ точкахъ ея имѣетъ величину обратно пропорціональную величинамъ ординатъ точекъ; эта кривая есть ни что иное, какъ *упругая линія* Якова Бернулли.

Уравненіе (307) можетъ быть представлено въ такомъ видѣ:

$$\frac{\frac{d^2y}{dz^2}}{\left(1+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{C_1}{\mathfrak{B}}y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\textbf{(308)}$$

Прежде чѣмъ интегрировать это уравненіе, мы представимъ еще въ иномъ видѣ составленное нами первое изъ дифференціальнымъ уравненій (306), а именно въ слѣдующемъ:

$$-\mathfrak{B}\frac{d^2\varphi}{ds^2} = -C_1 \sin\varphi.$$

Интегрируя уравненіе въ этомъ видѣ, получимъ:

$$\mathfrak{B}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = h - 2C_1 \cos\varphi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(309)}$$

Это уравненіе аналогично съ тѣмъ, которое выражаетъ законъ живой силы въ качаніи сложнаго маятника вокругъ неподвижной оси подъ вліяніемъ силы тяжести, причемъ s замѣняетъ время. Интегрируя это уравненіе, получимъ такъ сказать неявное уравненіе упругой линіи въ видѣ зависимости между угломъ φ и длиною дуги s.

Руководствуясь аналогіею между формулами, относящимися къ качанію маятника и къ упругой линіи, мы можемъ прямо написать неявныя уравненія различныхъ категорій упругой линіи.

Представимъ уравненіе (309) подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = -\frac{2C_1}{\mathfrak{B}}\left(\cos\varphi - \frac{h}{2C_1}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(309,}\ bis\mathbf{)}$$

и сравнимъ его съ соотвѣтственнымъ уравненіемъ движенія маятника:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{R}\left(\cos\varphi - \frac{b}{R}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(310)}$$

Сходство между этими двумя уравненіями будетъ полное тогда, когда C_1 будетъ отрицательною. Тогда $(-C_1 : \mathfrak{B})$ будетъ на мѣстѣ $(g : R)$, отношеніе $(h : 2C_1)$ на мѣстѣ $(b : R)$ и s на мѣстѣ t.

При h^2 меньшемъ $4C_1^2$ длина дуги s можетъ быть выражена въ φ по извѣстной въ теоріи маятника формулѣ:

$$s = \sqrt{n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\eta}}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(311)}$$

гдѣ

$$k = \sin\frac{\varphi_0}{2},\ \cos\varphi_0 = \frac{h}{2C_1},\ k\sin\eta = \sin\frac{\varphi}{2},\ n = \frac{\mathfrak{B}}{-C_1}.$$

При $h = -2C_1$, когда $\varphi_0 = \pi$ и $k = 1$, длина s, считая отъ того мѣста, гдѣ $\varphi = 0$, выразится такъ:

$$s = \sqrt{n}\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(312)}$$

При h большемъ $(-2C_1)$, длина дуги s, считая отъ того мѣста, гдѣ $\varphi = 0$, выразится такъ:

$$s = \sqrt{n}\sqrt{\frac{-2C_1}{h-2C_1}}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{2\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}}, \ldots\ldots\ldots\ldots (313)$$

гдѣ $\alpha^2(h-2C_1) = -4C_1$.

Чтобы получить уравненіе упругой линіи въ координатахъ z и y, возьмемъ уравненіе (309) и подставимъ въ него $(-p)$ вмѣсто производной отъ φ по s и затѣмъ замѣнимъ p черезъ $(y:n)$ (такъ какъ $\mathfrak{B}p = -C_1 y$); тогда y выразится въ $\cos\varphi$ слѣдующимъ образомъ:

$$y^2 = 2n\left(\cos\varphi - \frac{h}{2C_1}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

Замѣнивъ здѣсь $\cos\varphi$ единицею, дѣленною на корень изъ $1+(y')^2$, рѣшивъ уравненіе относительно производной y' (отъ y по z), отдѣливъ перемѣнныя и интегрируя, получимъ:

$$z + C = \int\frac{2n-(a^2-y^2)}{\sqrt{(a^2-y^2)(4n-(a^2-y^2))}}\,dy,$$

гдѣ

$$a^2 = 2n\left(1-\frac{h}{2C_1}\right),$$

т. е. a есть ордината y, соотвѣтствующая углу φ, равному нулю.

Положимъ $y = a\sin u$ и (при $h^2 < 4C_1^2$) возьмемъ за начало координатъ ту точку кривой, гдѣ $y = 0$, тогда z выразится такою разностью двухъ эллиптическихъ интеграловъ втораго и перваго вида:

$$z = \int_0^u\sqrt{4n - a^2\cos^2 u}\;du - \sqrt{n}\int_0^u\frac{2\sqrt{n}\,du}{\sqrt{4n-a^2\cos^2 u}} \ldots\ldots (314)$$

На чертежахъ 37-мъ, 38-мъ, 39-мъ, 40-мъ и 41-мъ представлены пять видовъ упругихъ кривыхъ, соотвѣтствующихъ h^2 меньшимъ $4C_1^2$.

Кривыя вида, изображеннаго на чертежѣ 37-мъ, получаются тогда, когда уголъ φ_0 меньше прямаго: на чертежѣ изображено нѣсколько періодовъ этой кривой, соотвѣтствующихъ нѣсколькимъ періодамъ угла φ. Въ точкѣ A изображено направленіе силы C_1 и въ точкѣ O — направленіе реакціи неподвижной точки, въ которой закрѣпленъ этотъ конецъ проволки.

Если уголъ φ_0 настолько малъ, что можно пренебречь четвертыми и высшими степенями отношенія $a:2\sqrt{n}$, то z можно выразить такъ:

$$z = \sqrt{n}\left[u\left(1-\frac{3a^2}{16n}\right) - \frac{3a^2}{32n}\sin 2u\right]$$

и отсюда:

$$u = \frac{z}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{3a^2}{16n}\right) + \frac{3a^2}{32n}\sin 2u.$$

Такъ какъ $y = a \sin u$, то при помощи ряда Лагранжа, съ тою же степенью приближенія, найдемъ:

$$y = a \sin\left[\frac{z}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{3a^2}{32n}\right)\right] + \frac{3a^3}{32n}\sin\frac{2z}{\sqrt{n}}\cos\frac{z}{\sqrt{n}} \ldots\ldots \textbf{(315)}$$

таково приближенное уравненіе упругой линіи при весьма малой величинѣ стрѣлки прогиба.

Если можно пренебречь и вторыми степенями отношенія $a:2\sqrt{n}$, то уравненіе упругой линіи приметъ видъ уравненія синусоиды:

$$y = a \sin\frac{z}{\sqrt{n}}.$$

Кривыя вида, изображеннаго на чертежѣ 38-мъ, получаются при углѣ φ_0, равномъ прямому. Какъ въ предыдущемъ, такъ и въ настоящемъ случаѣ разстояніе отъ O до основанія B (черт. 38) наибольшей ординаты $y = b$ выразится слѣдующею разностью:

$$z_B = \sqrt{n}\,(2E - K) \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(316)}$$

гдѣ:

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}\, d\psi, \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}},$$

и гдѣ $2k\sqrt{n} = a$.

При k равномъ нулю $2E = \pi$ и $2K = \pi$; затѣмъ, съ возростаніемъ k, E уменьшается, а K увеличивается. Поэтому, съ увеличеніемъ a или k, длина z_B уменьшается и обращается въ нуль при такомъ k, при которомъ $2E = K$.

Кривая вида, изображеннаго на чертежѣ 39-мъ, получается при углахъ φ_0 большихъ прямаго, пока разстояніе z_B не обратится въ нуль; тогда кривая получитъ видъ, изображенный на чертежѣ 40-мъ. При дальнѣйшемъ увеличеніи угла φ_0 получатся кривыя вида, изображеннаго на чертежѣ 41-мъ, причемъ z_B сдѣлается уже отрицательнымъ.

На чертежѣ 42-мъ представлена упругая линія, образующаяся при h равномъ $(-2C_1)$ и соотвѣтствующая тому случаю движенія маятника, когда онъ ассимптотически приближается къ своему положенію неустойчиваго равновѣсія.

Такъ какъ тогда $a = 2\sqrt{n}$, то если взять за начало координатъ абциссу, соотвѣтствующую ординатѣ $y = a$, выраженіе для z получитъ слѣдующій видъ:

$$z = 2\sqrt{n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{u} \sin u\, du - \sqrt{n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{u} \frac{du}{\sin u},$$

$$z = -\sqrt{4n - y^2} + \sqrt{n}\log\frac{2\sqrt{n} + \sqrt{4n - y^2}}{y}.$$

Въ тѣхъ случаяхъ, когда h болѣе $2C_1$, ордината y не обращается въ нуль (какъ видно изъ равенства (A)), но достигаетъ наименьшей величины b каждый разъ, какъ $\cos \varphi$ обращается въ (-1). Видъ упругой линіи представленъ на чертежѣ 43-мъ.

Въ томъ случаѣ, когда $C_1 = 0$, проволока изгибается подъ вліяніемъ паръ силъ, приложенныхъ къ концамъ ея. Изъ уравненія $\mathfrak{B} \frac{dp}{ds} = 0$ слѣдуетъ, что тогда $p =$ постоянному; далѣе найдемъ: $\varphi = Ds$ или $s = R\varphi$, если означить черезъ R отношеніе $(1 : D)$. Слѣдовательно въ этомъ случаѣ проволока получаетъ видъ дуги круга. Величины моментовъ паръ, приложенныхъ къ концамъ проволоки, должны быть равны $(E\mathfrak{B} : R)$.

2. Упомянемъ также и объ другихъ случаяхъ равновѣсія проволоки съ какимъ бы то ни было поперечнымъ сѣченіемъ, когда на концы ея дѣйствуютъ только пары силъ и когда ось изогнутой проволоки образуетъ не плоскую кривую.

Если поперечное сѣченіе проволоки есть кругъ или правильный многоугольникъ, такъ что $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, то уравненія (306) при C_1 равномъ нулю аналогичны уравненіямъ вращательнаго движенія по инерціи тѣла, имѣющаго эллипсоидомъ инерціи эллипсоидъ вращенія.

Изъ уравненій (306) тогда слѣдуетъ:

$$r = n, \; p = D \cos (\mu s + \gamma), \; q = D \sin (\mu s + \gamma),$$

если $\mathfrak{C} > \mathfrak{A}$; здѣсь $\mu \mathfrak{A} = (\mathfrak{C} - \mathfrak{A}) n$, D, γ и n суть постоянныя.

Продолжая изслѣдованіе далѣе, легко убѣдиться, что ось проволоки образуетъ цилиндрическую спираль.

Если $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ неравны между собою, то вопросъ о равновѣсіи проволоки имѣетъ аналогію съ общимъ вопросомъ о вращеніи тѣла по инерціи. Рѣшеніе и этого вопроса можетъ быть доведено до конца и координаты точекъ оси проволоки выразятся въ эллиптическихъ функціяхъ и въ функціи $\mathfrak{Z}$ отъ s *).

3. Если проволока съ поперечнымъ сѣченіемъ въ видѣ круга или многоугольника будетъ изогнута дѣйствіемъ внѣшнихъ напряженій, приложенныхъ къ концамъ ея, причемъ C_1 не равно нулю и ось проволоки не заключается въ одной плоскости, то уравненія (306) получатъ слѣдующій видъ:

$$\mathfrak{A} \frac{dp}{ds} = (\mathfrak{A} - \mathfrak{C})\, qr + C_1 \sin \phi \sin \text{э}, \quad p = -\frac{d\text{ж}}{ds} \sin \phi \cos \text{э} + \frac{d\phi}{ds} \sin \text{э},$$

$$\mathfrak{A} \frac{dq}{ds} = (\mathfrak{C} - \mathfrak{A})\, rp + C_1 \sin \phi \cos \text{э}, \quad q = \frac{d\text{ж}}{ds} \sin \phi \sin \text{э} + \frac{d\phi}{ds} \cos \text{э},$$

$$\mathfrak{C} \frac{dr}{ds} = 0 \qquad\qquad r = \frac{d\text{ж}}{ds} \cos \phi + \frac{d\text{э}}{ds}.$$

Этотъ вопросъ имѣетъ аналогію съ вопросомъ о вращеніи гироскопа подъ вліяніемъ силы тяжести вокругъ неподвижной точки, находящейся на оси симметріи гироскопа, но не совпадающей съ его центромъ тяжести. Рѣшеніе вопроса можетъ быть доведено до конца, но мы ограничимся только тѣмъ частнымъ случаемъ, который ана-

---

*) См. статью: Hess, Ueber die Biegung und Drillung eines unendlich-dünnen elastischen Stabes.... Mathematische Annalen. Bd. 23, стр. 181.

логиченъ вращенію безъ нутаціи; не трудно предвидѣть, что въ этомъ случаѣ ось проволоки должна получить видъ спирали.

Положивъ $ф =$ постоянному, найдемъ, что $p^2 + q^2 = (ж' \sin ф)^2$ и $p \sin э + q \cos э = 0$, а потому помноживъ первое изъ трехъ дифференціальныхъ уравненій на p, второе на q и сложивъ, получимъ во второй части нуль; слѣдовательно $p^2 + q^2 =$ постоянному.

Означивъ постоянную величину производной $\frac{dж}{ds}$ черезъ ω_1 и постоянную величину r черезъ n, мы найдемъ постоянную величину и для производной:

$$\frac{dэ}{ds} = n - \omega_1 \cos ф = \omega_2;$$

затѣмъ получимъ:

$$ж = \omega_1 s, \quad э = \omega_2 s + э_0.$$

Видъ кривой опредѣлится послѣ интегрированія слѣдующихъ уравненій:

$$\frac{dx}{ds} = \nu_x = \sin ф \cos (\omega_1 s), \quad \frac{dy}{ds} = \nu_y = \sin ф \sin (\omega_1 s), \quad \frac{dz}{ds} = \nu_z = \cos ф.$$

Уравненія кривой:

$$x = \frac{\sin ф}{\omega_1} \sin (\omega_1 s), \quad y = -\frac{\sin ф}{\omega_1} \cos (\omega_1 s), \quad z = s \cos ф,$$

выражаютъ, что ось проволоки образуетъ винтовую спираль, касательная къ которой составляетъ съ осью Z-овъ уголъ $ф$ и которая находится на цилиндрѣ радіуса R, равнаго $(\sin ф : \omega_1)$, такъ что высота h полнаго оборота винта равна $(2\pi \cos ф : \omega_1)$.

Для того, чтобы ось проволоки имѣла такой видъ, необходимо, чтобы моменты $Л_\xi$, $Л_\eta$ и $Л_\zeta$ на оконечности ея были равны:

$$Л_\xi = -E\mathfrak{A} \frac{\sin^2 ф}{R} \cos э, \quad Л_\eta = E\mathfrak{A} \frac{\sin^2 ф}{R} \sin э, \quad Л_\zeta = 2K\mathfrak{A} n$$

и чтобы EC_1 было равно:

$$EC_1 = \mathfrak{A} \frac{\sin ф}{R} \left(2Kn - E \frac{\sin ф \cos ф}{R}\right).$$

Моменты же $Л_x$, $Л_y$, $Л_z$ должны быть:

$$Л_x = \mathfrak{A} \sin ф \cos ж \left(2Kn - E \frac{\sin ф \cos ф}{R}\right) = EC_1 R \cos ж,$$

$$Л_y = \mathfrak{A} \sin ф \sin ж \left(2Kn - E \frac{\sin ф \cos ф}{R}\right) = EC_1 R \sin ж,$$

$$Л_z = \mathfrak{A} \left(E \frac{\sin^3 ф}{R} + 2Kn \cos ф\right).$$

Представимъ себѣ, что концы проволоки прикрѣплены къ двумъ пластинкамъ, перпендикулярнымъ къ оси Z-овъ и что напряженія EC_1 и $-EC_1$ приложены не непосредственно къ концамъ проволоки, но къ точкамъ пластинокъ, находящимся на оси Z-овъ; тогда проэкціи на оси X-овъ и $У$-овъ момента силы EC_1 вокругъ оконечности проволоки (координаты этой оконечности: $x = R \sin ж$, $y = -R \cos ж$) будутъ равны $EC_1 R \cos ж$ и $EC_1 R \sin ж$, т. е. $Л_x$ и $Л_y$. Слѣдовательно проволока будетъ въ равновѣсіи, имѣя форму цилиндрической винтовой линіи радіуса R и наклоненія $ф$ къ оси Z-овъ, если къ пластинкамъ, кромѣ силъ EC_1 и $-EC_1$, будетъ приложено еще по парѣ силъ съ моментами $Л_z$ и $(-Л_z)$.

Можно удержать проволоку въ этомъ видѣ только силами EC_1 и $(-EC_1)$, безъ содѣйствія паръ $Л_z$ и $(-Л_z)$; для этого необходимо, чтобы n и ω_2 имѣли слѣдующія величины:

$$n = -\frac{E}{2KR}\frac{\sin^3 ф}{\cos ф}, \quad \omega_2 = -\frac{E \sin^2 ф + 2K \cos^2 ф}{2KR} \operatorname{tg} ф$$

и чтобы сила EC_1 была равна:

$$EC_1 = -\frac{E\mathfrak{A}}{R}\frac{\sin^2 ф}{\cos ф}.$$

Знакъ минусъ показываетъ, что силы эти должны стремиться сближать пластинки и сжимать спираль.

§ 52. Винтовая пружина.

Уравненія равновѣсія, приведенныя въ § 49, относятся ко всякимъ проволокамъ, правильнымъ или неправильнымъ, бывшимъ въ предварительномъ состояніи прямолинейными или криволинейными. Между прочимъ можно замѣтить, что изъ уравненій (297) и (298) можно исключить величины B_ξ и B_η и тогда получимъ четыре слѣдующія дифференціальныя уравненія, заключающія B_ζ, $Л_x$, $Л_y$, $Л_z$:

$$\frac{d}{ds}(B_\zeta \nu_x + Q_z \nu_y - Q_y \nu_z) + \sigma \mathfrak{B}_x = 0, \quad Q_x = \frac{dЛ_x}{ds} + \sigma \mathfrak{L}_x,$$

$$\frac{d}{ds}(B_\zeta \nu_y + Q_x \nu_z - Q_z \nu_x) + \sigma \mathfrak{B}_y = 0, \quad Q_y = \frac{dЛ_y}{ds} + \sigma \mathfrak{L}_y,$$

$$\frac{d}{ds}(B_\zeta \nu_z + Q_y \nu_x - Q_x \nu_y) + \sigma \mathfrak{B}_z = 0, \quad Q_z = \frac{dЛ_z}{ds} + \sigma \mathfrak{L}_z,$$

$$Q_x \nu_x + Q_y \nu_y + Q_z \nu_z = 0.$$

Соотношенія же между моментами $Л$ и величинами p, q, r, выведенныя въ § 50-мъ, относятся только къ проволокамъ, бывшимъ въ предварительномъ состояніи прямолинейными. Для проволоки, ось которой въ предварительномъ состояніи была криволинейною, предполагается существованіе слѣдующей зависимости между моментами $Л$, величинами p, q, r въ деформированномъ состояніи и величинами p_0, q_0 и r_0 въ предварительномъ состояніи:

$$p - p_0 = \frac{Л_\xi}{E\mathfrak{B}_c}, \quad q - q_0 = \frac{Л_\eta}{E\mathfrak{A}_c}, \quad r - r_0 = \frac{Л_\zeta}{E\mathfrak{C}_c} \quad \ldots\ldots\ldots (317)$$

Вслѣдствіе этого для проволоки съ поперечнымъ сѣченіемъ въ видѣ круга или многоугольника, бывшей изогнутою въ предварительномъ состояніи и неподверженной объемнымъ силамъ, уравненія равновѣсія (306) получатъ слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathfrak{A}\frac{d(p-p_0)}{ds}=\mathfrak{A}(q-q_0)r-\mathfrak{C}(r-r_0)q+C_1\sin\phi\sin\vartheta=0,\\
&\mathfrak{A}\frac{d(q-q_0)}{ds}=\mathfrak{C}(r-r_0)p-\mathfrak{A}(p-p_0)r+C_1\sin\phi\cos\vartheta=0,\\
&\mathfrak{C}\frac{d(r-r_0)}{ds}=\mathfrak{A}((p-p_0)q-(q-q_0)r).
\end{aligned}\right\}\ldots(318)$$

Положимъ, что проволока въ предварительномъ состояніи имѣла форму винтовой спирали радіуса R_0 и угла наклоненія ϕ_0 къ оси цилиндра, такъ что p_0, q_0 и r_0 имѣютъ слѣдующія величины:

$$p_0=-\frac{\sin^2\phi_0}{R_0}\cos\vartheta_0,\ \ q_0=\frac{\sin^2\phi_0}{R_0}\sin\vartheta_0,\ \ r_0=\frac{\sin\phi_0\cos\phi_0}{R_0}+(\omega_2)_0.$$

Эта проволока можетъ получить видъ винтовой спирали радіуса R и угла наклоненія ϕ, причемъ новыя ϑ будутъ равны прежнимъ ϑ_0 подъ вліяніемъ напряженій C_1E и паръ, приложенныхъ концамъ ея. Въ самомъ дѣлѣ, послѣднее изъ уравненій (318) удовлетворяется тождественно при r равномъ постоянной величинѣ и при $\vartheta=\vartheta_0$, а изъ первыхъ двухъ, при слѣдующихъ величинахъ p, q, r:

$$p=-\frac{\sin^2\phi}{R}\cos\vartheta_0,\ \ q=\frac{\sin^2\phi}{R}\sin\vartheta_0,\ \ r=\frac{\sin\phi\cos\phi}{R}+(\omega_2)_0,$$

получимъ слѣдующее выраженіе величины C_1E:

$$C_1E=\frac{\mathfrak{A}}{R}\left(2K\left(\frac{\sin\phi\cos\phi}{R}-\frac{\sin\phi_0\cos\phi_0}{R_0}\right)\sin\phi-E\left(\frac{\sin^2\phi}{R}-\frac{\sin^2\phi_0}{R_0}\right)\cos\phi\right).\ (319)$$

Моменты же $Л_x$, $Л_y$, $Л_z$ окажутся равными:

$$Л_x=EC_1R\cos ж,\ \ Л_y=EC_1R\sin ж,$$

$$Л_z=\mathfrak{A}\left(E\left(\frac{\sin^2\phi}{R}-\frac{\sin^2\phi_0}{R_0}\right)\sin\phi+2K\left(\frac{\sin\phi\cos\phi}{R}-\frac{\sin\phi_0\cos\phi_0}{R_0}\right)\cos\phi\right)..(320)$$

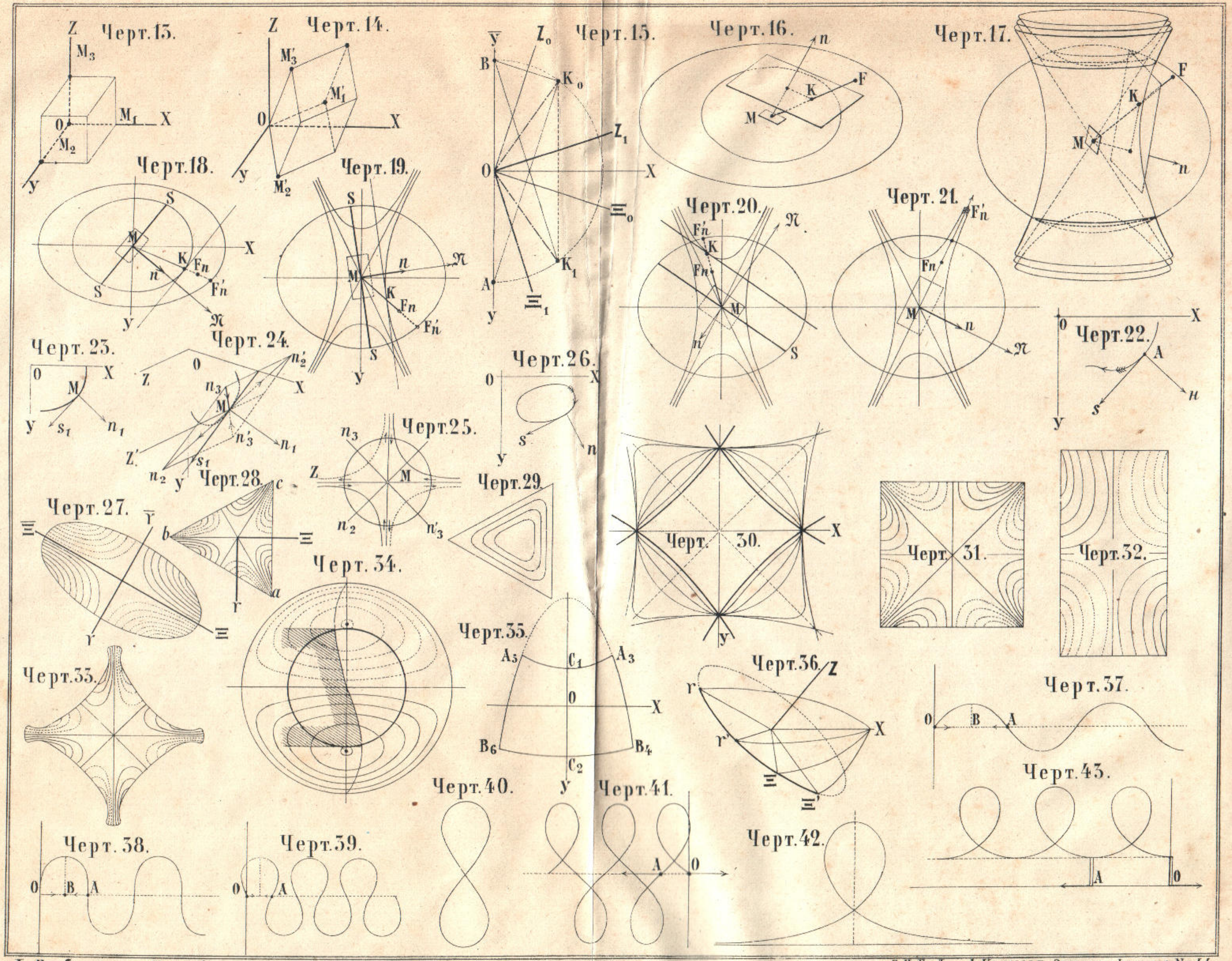
Если концы проволоки будутъ прикрѣплены къ пластинкамъ, въ разстояніи R отъ оси цилиндра, то проволока будетъ въ равновѣсіи подъ вліяніемъ силъ EC_1 и $-EC_1$ и паръ $Л_z$ и $-Л_z$, приложенныхъ къ этимъ пластинкамъ.

Изъ формулы (319) получимъ приближенное выраженіе величинъ силъ, которыя надо приложить къ концамъ винтовой пружины съ незначительною высотою шага винта, для того, чтобы растянуть ее на незначительную длину по высотѣ винта; положивъ ϕ равнымъ $\phi_0+\delta\phi_0$ и пренебрегая квадратами и высшими степенями $\delta\phi_0$ и измѣненіемъ радіуса цилиндра, получимъ:

$$EC_1=2K\mathfrak{A}\frac{\delta z}{lR^2},\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(321)$$

гдѣ l есть длина проволоки, $z=l\cos\phi_0$.

ОГЛАВЛЕНІЕ.



С.П.Б. Лит. Ф. Кремеръ. Звѣринская ул. №44.